APÉNDICE C
MÚLTIPLES CIUDADES

En esta sección se plantea un modelo con $J > 2$ ciudades, y se argumenta que el comportamiento cualitativo de la economía se caracteriza igualmente por un crecimiento secuencial de ciudades, siempre y cuando éstas difieran en tamaño en el período inicial.

FAMILIAS

La restricción presupuestaria de las familias puede escribirse como

$$\sum_{j=1}^{J} \dot{z}^j = \omega + \sum_{j=1}^{J} r^j z^j - c$$

donde $z^j \equiv \dfrac{Z^j}{N}$ representan la cantidad (en per cápita) de activo j que posee la familia, $j = 1,...J$. Asumiendo una función de utilidad logarítmica, el problema de una familia representativa es:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln(c)dt$$

$$\sum_{j=1}^{J} \dot{z}^j + c = \omega + \sum_{j=1}^{J} r^j z^j$$

$$\dot{z}^j = i^j, \forall j = 1,...,J$$

$$i^j \geq 0, \forall j = 1,...,J$$

$$z_0{}^j \text{ dado}, \forall j = 1,...,J$$

donde c representa el consumo per cápita y, como antes, las familias se enfrentan a las restricciones de irreversibilidad $\dot{z}^j \geq 0$, $\forall j = 1,...J$.

EMPRESAS

La función de producción de la empresa i localizada en la ciudad j es idéntica a la descrita en el caso de dos ciudades. La movilidad del trabajo implica

$$\frac{N^j}{N^{j'}} = \left(\frac{k^j}{k^{j'}}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

El producto marginal bruto del capital (es decir, sin considerar los costes de congestión) en la ciudad j es entonces una función x de los stocks de capital en cada ciudad

$$f_j = x\,(k^1, k^2,..., k^J)$$

donde la población total N se ha normalizado a 1.

EQUILIBRIO

Como en el caso de dos ciudades, es fácil demostrar que $f_j > f_{j'}$, $\forall k^j > k^{j'} > 0$. Considérense los siguientes supuestos sobre la distribución inicial de ciudades:

Supuesto 1'

$$k_0^1 > k_0^2 > ... > k_0^J$$

Supuesto 2'

$$\tilde{f}_1(0) > \tilde{f}_2(0) > ... > \tilde{f}_J(0) > \rho + \delta$$

donde $\tilde{f}_J(0) \equiv f_j\,(0) - g'(k_j(0))$, $\forall j = 1,..., J$

Con estos supuestos el único equilibrio competitivo en una economía con J ciudades tiene las mismas características que en el caso más sencillo de dos ciudades. En la fecha inicial, las familias solamente invierten en la ciudad que tiene un mayor stock de capital, puesto que es la mejor oportunidad de inversión existente. Cuando el stock de capital instalado en esta ciudad alcanza un nivel crítico (dictado por los costes de congestión), la inversión comienza en la segunda mayor ciudad. El proceso continúa con el resto de las ciudades. Como en el modelo con dos ciudades, para asegurar que la inversión tiene lugar en todas las ciudades, es necesario asumir que la productividad del capital en todas ellas es suficientemente alta como para que ésta sea rentable:

Supuesto 3′

$$\tilde{f}_{j\hat{t}j} > \rho + \delta, j = 1,...,J$$

donde $\hat{t}_j$ representa el período en el que la ciudad $j-1$ ha alcanzado su nivel crítico de costes de congestión. La forma exacta de la distribución del tamaño de ciudades en el estado estacionario depende del valor que se asigne a los parámetros. Los dos casos extremos son: uno en el que todas las ciudades terminan teniendo el mismo tamaño (*convergencia estricta*) y otro en el que todas las ciudades tienen diferente tamaño (*no convergencia*), con un gran número de casos intermedios.

CREACIÓN DE NUEVAS CIUDADES

Si se introduce crecimiento de la población en el modelo, es necesario modificar el modelo teórico para permitir la creación de nuevas ciudades. Un trabajo reciente que modeliza esto es HENDERSON y VENABLES (2004). En el modelo presentado en este trabajo, incluso sin crecimiento de la población, es posible introducir la posibilidad de invertir en una nueva ciudad en cada período. Esta ampliación presenta dos dificultades: en primer lugar, el problema de maximización debe incluir una elección discreta (invertir en una nueva ciudad o no hacerlo) además de las decisiones ya estudiadas. La segunda dificultad reside en el hecho de que existe un problema de coordinación entre las empresas, puesto que ninguna tiene incentivos a ser la primera en invertir en una ciudad donde el stock de capital instalado es nulo. A menos que el gobierno provea a las empresas de los incentivos adecuados, es posible que no se invierta en ninguna nueva ciudad.