

CAPÍTULO IV

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es desarrollar una breve introducción a la Teoría de Sistemas Dinámicos, de modo que aquellos lectores que no estén familiarizados con dicha teoría, conozcan los elementos básicos necesarios para comprender el resto de capítulos del libro. Se parte de una descripción de los conceptos fundamentales, identificando los distintos tipos de sistemas, sus características y formulación. Posteriormente se introduce el concepto de sistema caótico desde un punto de vista cualitativo y obviando los aspectos más técnicos. Por último se desarrolla una breve introducción a los métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, algo que resulta necesario para tratar con este tipo de modelos, ya que en general no cuentan con solución analítica.

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de Sistemas Dinámicos puede considerarse una forma de describir cómo un determinado estado se transforma en otro a lo largo del tiempo, es decir, cómo evoluciona en el tiempo un cierto proceso. De modo algo más concreto FERNÁNDEZ DÍAZ (2000: 55) define un sistema dinámico como un conjunto de elementos caracterizados por una serie de variables que se relacionan entre sí mediante ecuaciones matemáticas, siendo el objetivo determinar la evolución temporal de dichas variables. Se emplearán por tanto ecuaciones diferenciales en el caso de los sistemas continuos y ecuaciones en diferencias en los discretos.

Cualquier sistema realimentado de dimensión finita puede ser representado mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias (MEES, 1986: 99) y de ahí la utilidad de emplear este tipo de técnicas para modelizar un fenómeno como las Externalidades de Red, que se caracteriza precisamente por la existencia de realimentación. Como afirma ARTHUR (1990), aquellos sistemas caracterizados por la realimentación deben ser modelizados como procesos dinámicos.

En este sentido merece la pena reproducir dos comentarios relativos a la aplicación de la Teoría de Sistemas Dinámicos. El primero de ellos (LEVY, 1994) apareció en un artículo publicado en el *Strategic Management Journal*: «la Teoría del Caos proporciona un útil marco teórico para comprender la evolución de las industrias y las complejas interacciones existentes entre los distintos actores implicados». El segundo es especialmente relevante en el contexto de este libro, en tanto que fue realizada por Ludwig VON BERTALANFFY, uno de los biólogos teóricos más importantes de la primera mitad del siglo XX¹, y el artículo al que se hace referencia fue publicado en el *Academy of Management Journal* (BERTALANFFY, 1972): «La naturaleza interdisciplinar de los conceptos, modelos y principios aplicados a sistemas proporciona una posible aproximación hacia la unificación de la ciencia».

2. SISTEMAS DINÁMICOS: CONCEPTOS GENERALES

Diremos que una ecuación diferencial (o en diferencias) es de primer orden cuando está caracterizada por una única variable x , que puede considerarse la coordenada de un punto en una recta denominada espacio de fases, y que se mueve a lo largo de ella con el paso del tiempo. El espacio de fases es por tanto un espacio vectorial en el que cada vector representa la descripción instantánea del sistema dinámico en un determinado momento, siendo cada una de las componentes del vector una de las variables del sistema. Al recorrido de la solución, $x(x_0, t)$, se le denomina órbita o trayectoria.

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \text{Ecuación diferencial de primer orden}$$

$$x_{k+1} = f(x_k, k) \quad \text{Ecuación en diferencias de primer orden}$$

Los sistemas dinámicos de primer orden estarán por tanto constituidos por este tipo de ecuaciones. Pero es posible formular modelos más

¹ No olvidemos que muchos de los modelos que se tratarán en el capítulo VI provienen del campo de la Biología Teórica.

complejos de orden mayor que uno, que quedarán representados por sistemas de ecuaciones, como por ejemplo los sistemas continuos de segundo orden:

$$\begin{aligned}x_1' &= \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t) \\x_2' &= \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t)\end{aligned}$$

Es preciso aclarar que un sistema dinámico de segundo orden es lo que se conoce también como sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, y que toda ecuación diferencial de segundo orden equivale de hecho a uno de estos sistemas. En efecto, si consideramos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = 0$$

siempre es posible realizar el cambio de variable $y(t) = dx/dt$, de modo que la ecuación diferencial de segundo orden puede expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:

$$\begin{aligned}y &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= -f(x, y, t)\end{aligned}$$

No obstante hay sistemas dinámicos de segundo orden que no provienen de una única ecuación diferencial de segundo orden, de modo que el concepto de sistema dinámico es más amplio. En el caso más general, un sistema dinámico constará de n ecuaciones representando el estado de n variables en un espacio de fases de dimensión n .

$$\begin{aligned}x_k' &= \frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ k &= 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lotka-Volterra para competencia entre n especies que aparecen en cualquier manual de sistemas dinámicos o biología teórica (ver por ejemplo LUENBERGER, 1979: 374-375) son un ejemplo de este tipo de sistemas. No obstante, a medida que se incrementa la dimensión del modelo, los cálculos numéricos requeridos para su resolución

umentan de forma considerable, llegando a hacerlos inviables en algunos casos. Ésta es la conocida «maldición de la dimensión».

Por otra parte se pueden distinguir tres tipos de sistemas dinámicos en función del comportamiento de sus órbitas. Llamando U al subconjunto de \mathbb{R}^n en el que se mueve el sistema tendremos:

- **Sistemas Disipativos:** U se contrae con el paso del tiempo, de modo que todo movimiento se atenúa con el tiempo tendiendo a una posición de equilibrio². La característica fundamental de este tipo de sistemas es la pérdida de energía como consecuencia de algún tipo de fricción.

- **Sistemas Conservativos:** U se mantiene con el paso del tiempo. Como su propio nombre indica la energía del sistema se conserva.

- **Sistemas Expansivos:** U se expande con el paso del tiempo.

Además las ecuaciones y sistemas de ecuaciones pueden ser lineales, cuando la función f es lineal en cada una de las variables (polinomio de grado 1), y no lineales cuando ocurre lo contrario. Por ejemplo la ecuación $x' = ax - b$ es lineal mientras que la logística $x' = ax - bx^2$ no lo es. El problema de los sistemas no lineales es que su complejidad obliga casi siempre a emplear métodos numéricos para la búsqueda de soluciones. Finalmente hablaremos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones autónomos si no contienen de forma explícita la variable independiente t , en el caso de los sistemas continuos, o k , en el caso de los discretos.

Respecto a la formulación de modelos utilizando la Teoría de Sistemas Dinámicos, el procedimiento es similar al seguido con otro tipo de técnicas, y pueden distinguirse esencialmente tres fases (ARACIL SANTOJA, 1983: 135-177):

1. **Conceptualización**, basada en la comprensión del fenómeno objeto de estudio.

2. **Formulación del modelo** mediante las ecuaciones diferenciales o en diferencias adecuadas.

3. **Evaluación del modelo** mediante el uso de simulaciones por ordenador. En esta etapa se incluye el análisis de sensibilidad, es decir, el estudio de la dependencia de los resultados respecto a los valores de los parámetros.

El proceso de construcción del modelo no es estrictamente secuencial, sino que en ocasiones será necesario volver a etapas anteriores con

² El equilibrio no tiene por qué ser necesariamente un único punto. Debe entenderse equilibrio como la existencia de un atractor.

el fin de ir ajustando cada vez con mayor precisión el modelo al sistema real que se está analizando.

Por otra parte la dinámica de sistemas difiere de otros métodos de análisis estadístico, ya que estos últimos ponen especial énfasis en la predicción puntual, mientras que la dinámica de sistemas pretende explicar el comportamiento en términos más cualitativos por lo que su necesidad de datos cuantitativos para la formulación del modelo es menor: el interés se centra en la comprensión de las fuerzas que operan entre las partes del sistema y por tanto la precisión con que se conozcan los parámetros del modelo tiene un interés secundario (ARACIL SANTOJA, 1983: 171).

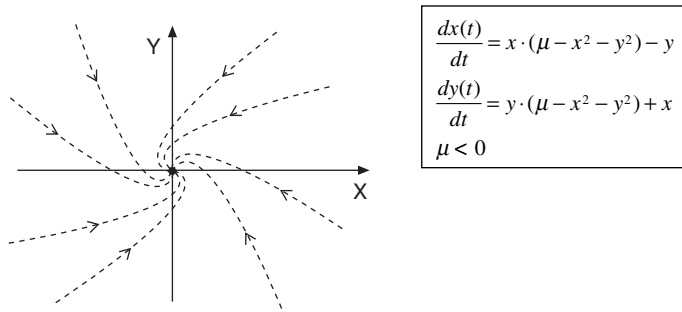
Por último es preciso indicar que se han desarrollado numerosos trabajos en el ámbito de la Economía basados en la Teoría de Sistemas Dinámicos, lo que justifica la utilidad de este tipo de métodos en dicho ámbito de investigación. Como muestra, recientemente LANDA BERCEBAL y VELASCO MORENTE (2004) han publicado un trabajo en el que prueban, aplicando esta técnica, que se pueden obtener ciclos límite en modelos empresariales. RODRÍGUEZ ARANA (2004) ha estudiado la inestabilidad dinámica de un modelo basado en la curva de Phillips. VÍLCHEZ LOBATO *et al.*, (2002) aplicaron estos modelos para estudiar la pesquería en la región Suratlántica española. En los manuales de LOMELÍ y RUMBOS (2003), FERNÁNDEZ DÍAZ (2000) o ARACIL SANTOJA (1983) también pueden encontrarse algunos ejemplos de diferentes problemas socioeconómicos estudiados mediante este enfoque. El manual de PUU (2003) incluye también unos interesantes modelos algo más complejos, proponiendo incluso un modelo de crecimiento de la población que podría emplearse como modelo de difusión de tecnologías (pp. 504-509). La Tesis Doctoral de GIMENO NOGUÉS (2000) es otra interesante aplicación de esta teoría al análisis de series temporales financieras, y en esta misma línea OLMEDA y PÉREZ (1995) estudiaron la presencia de caos en el mercado de valores español. La Tesis Doctoral de NAVARRO CID (2001) y sus trabajos en este campo (NAVARRO CID, 2000), con un enfoque mucho más organizativo que las investigaciones anteriormente mencionadas, son otros ejemplos que muestran las considerables posibilidades de esta técnica matemática.

3. ATRACTORES

El concepto de atractor va ligado a los sistemas disipativos, puesto que son los únicos en los que U se contrae con el paso del tiempo (GIMENO NOGUÉS, 2000: 64). Se define como un subconjunto A del espacio de fases al que las órbitas convergen, de modo que una vez alcanzado, las trayectorias ya no pueden escapar y permanecen siempre dentro de él. Existen cuatro tipos fundamentales de atractores:

1. **Puntos fijos.** Este tipo de atractores consiste en un único punto al que tienden todas las órbitas que se inician en su entorno. El sistema dinámico que se muestra en la figura 4.1 presenta un punto fijo en el origen de coordenadas para valores negativos de su parámetro (KHALIL, 2002: 73-74), mientras que para valores positivos genera un ciclo límite como se muestra en la figura 4.2.

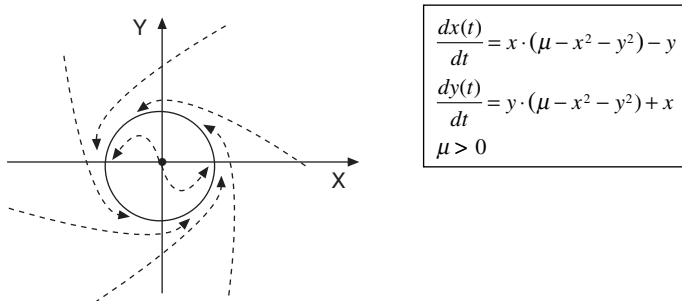
FIGURA 4.1
EJEMPLO DE PUNTO FIJO



Fuente: Adaptado de KHALIL, (2002: 75).

2. **Atractor periódico o ciclo límite.** Un punto periódico o cíclico se define como un punto ξ para el que existe un n tal que $f^n(\xi) = \xi$, es decir, la órbita se cierra. El menor entero n que satisface la expresión se denomina orden del punto periódico. Un atractor periódico estará formado por el conjunto de puntos periódicos que visita un vector antes de volver sobre sí mismo (figura 4.2).

FIGURA 4.2
EJEMPLO DE ATRACTOR PERIÓDICO



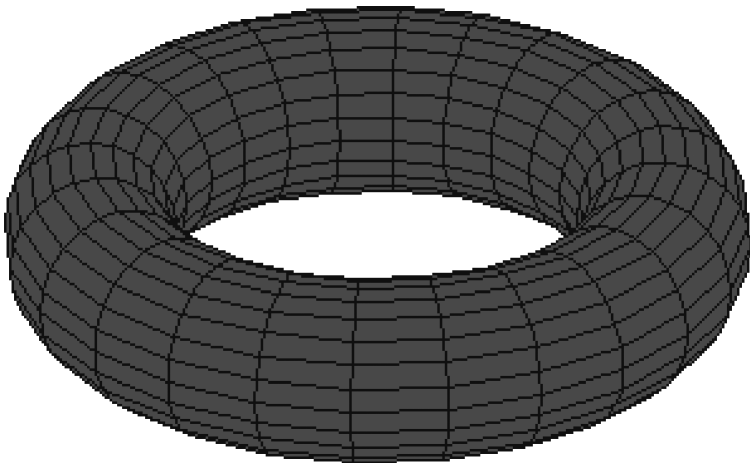
Fuente: Adaptado de KHALIL, (2002: 75).

Es importante mencionar que en 1975 Tien-Yien LI y James A. YORKE probaron que si un sistema dinámico unidimensional tiene un punto periódico de período 3, entonces tiene puntos periódicos de todos los períodos posibles (ver MARTÍN *et al.*, 1995: 201). Esto implica, como ocurre en el caso de la ecuación logística discreta, que existirá comportamiento caótico.

3. **Atractor Cuasi Periódico o Toro.** Este tipo de atractor surge de la unión de distintos ciclos periódicos de distinta periodicidad. En este caso, las órbitas que empiezan cerca las unas de las otras permanecen siempre cercanas, pero una órbita cualquiera continuará indefinidamente dando vueltas alrededor del toro sin volver a encontrarse nunca consigo misma (movimiento cuasiperiódico) o encontrándose consigo misma tras un número entero de rotaciones (movimiento periódico) (SCHAFFER y KOT, 1986: 158). Por tanto el conjunto de acumulación de las trayectorias no es un punto fijo de dimensión cero, ni un ciclo límite de dimensión uno, sino una superficie bidimensional con forma toroidal (FERNÁNDEZ PÉREZ *et al.*, 2003: 398).

No obstante, aunque el comportamiento de este tipo de atractores, representado en la figura 4.3, es bastante más complejo que el de los ya mencionados, dado que las órbitas cercanas permanecen próximas a medida que transcurre el tiempo, resulta posible realizar predicciones sobre el estado futuro del sistema, algo que no ocurre con los atractores extraños que se estudiarán a continuación.

FIGURA 4.3
ATRACTOR CUASI PERIÓDICO O TORO



Fuente: Elaboración propia.

4. **Atractor Extraño.** Este tipo de atractores presentan una geometría muy compleja, siendo lo que en matemáticas se denominan fractales³ (PEITGEN *et al.*, 1992: 656). Un fractal (acuñado por Benoît MANDÉLBROT) es un objeto que puede tener dimensión no entera (para ser más precisos, con dimensión de Hausdorff-Besicovitch mayor que su dimensión topológica). Al margen de detalles técnicos, esto significa que un objeto que tenga, por ejemplo, dimensión 1.26 (que en concreto es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para la curva de Koch) tendrá una longitud infinita (dimensión mayor que 1) y un área nula (dimensión menor que dos. Ver por ejemplo PEAK y FRAME, 1994: 91-92).

Merece la pena tratar brevemente el concepto de dimensión fractal dado que puede resultar confuso en primera instancia, y para ello se introducirán brevemente algunos conceptos elementales al menos de forma intuitiva. El modo más simple de medir la dimensión de un objeto es «contando» el volumen del número mínimo de esferas (o cubos) de dimensión adecuada que pueden recubrir el objeto. Llamando $N(r)$ al número de esferas de radio r que recubren el objeto A , la dimensión que se calcularía mediante este procedimiento sería la siguiente (ECKMANN y RUELLE, 1985):

$$\dim_k A = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}$$

En el caso de un objeto fractal esta dimensión puede tomar valores fraccionarios. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch, cuyo cálculo resulta más complicado, es en general algo distinta a la obtenida por este procedimiento (no se entrará en detalles técnicos pero para ello puede consultarse ECKMANN y RUELLE, 1985), aunque el método indicado sirve para comprender al menos a nivel intuitivo, cómo puede calcularse la dimensión de un objeto fractal⁴.

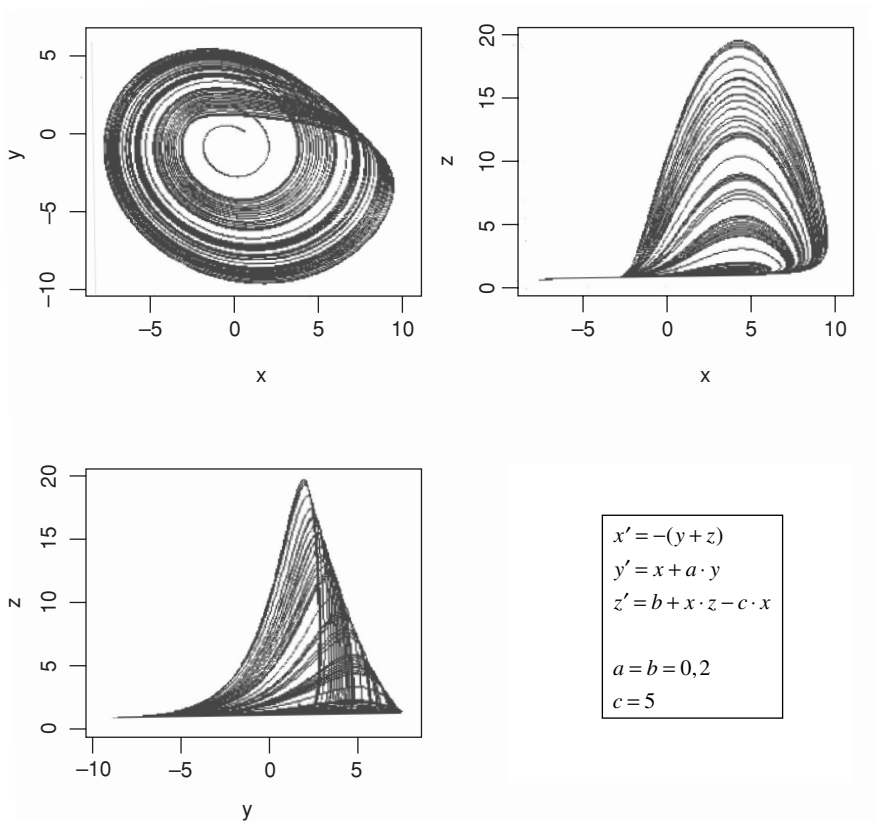
Volviendo a los atractores extraños, como afirman PEITGEN *et al.*, (1992: 656) estos objetos, que caracterizan el estado final de los sistemas disipativos altamente complejos, constituyen el nexo entre el caos y los fractales. Esto se debe a que dichos atractores considerados como objetos dinámicos son caóticos, y considerados como objetos geométricos son fractales. El comportamiento en este caso es impredecible y errático, de modo que un sistema dinámico que presente este tipo de atrac-

³ En la actualidad algunos investigadores afirman que en determinados sistemas caóticos pueden aparecer atractores extraños no fractales, aunque no se entrará a discutir este tema porque escapa al objeto del presente libro.

⁴ Hay que indicar que existen también otras formas alternativas de calcular la dimensión fractal (en este sentido puede consultarse por ejemplo PEITGEN *et al.*, 1992: 721-744).

tores exhibirá un comportamiento sin pauta reconocible, y una órbita atrapada en el atractor recorrerá a largo plazo todas las regiones que lo componen. La figura 4.4 muestra uno de los atractores extraños más conocidos y mencionados en la literatura.

FIGURA 4.4
ATRACTOR EXTRAÑO DE RÖSSLER



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

4. SISTEMAS CAÓTICOS

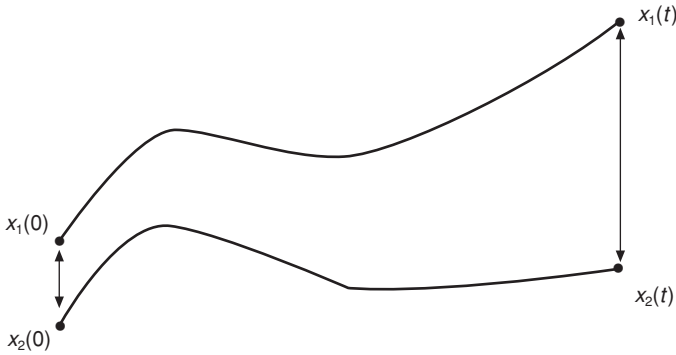
Los sistemas que presentan atractores extraños se denominan *sistemas caóticos*. Existen muchas posibles definiciones de caos (DEVANEY, 1986: 49), aunque quizá una de las más empleadas es aquella que caracteriza a un sistema caótico por tres propiedades (ver por ejemplo GIRALDO y SASTRE, 2002: 73; FERNÁNDEZ DÍAZ, 2000: 88-90; DEVANEY, 1986: 49-50):

1. **Dependencia de las condiciones iniciales.** Dadas dos condiciones iniciales arbitrariamente próximas, tras un número de iteraciones suficientemente grande pueden hallarse muy separadas. Éste es el conocido «efecto mariposa».

En efecto, si consideramos dos condiciones iniciales muy próximas, $x_1(0)$ y $x_2(0)$, de modo que $|x_1(0) - x_2(0)| = \xi_0$, al cabo de un tiempo t suficientemente grande ambas órbitas se hallarán muy separadas (ver figura 4.5).

FIGURA 4.5

SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES
EN SISTEMAS CAÓTICOS



Fuente: Ott (1993: 16).

Por ejemplo, en el caso concreto del atractor de Lorenz, las órbitas divergen como una exponencial de parámetro 0.9, es decir, $|x_1(t) - x_2(t)| \propto \xi_0 \cdot \exp(0,9 \cdot t)$. En este sentido, los denominados exponentes de Liapunov miden precisamente el crecimiento medio de errores infinitesimales en los valores iniciales, siendo por tanto una medida de la sensibilidad a las condiciones iniciales. Si denominamos ξ_0 al error inicial cometido, tras n iteraciones se habrá transformado en ξ_n . En este caso el exponente de Liapunov se define como:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_n \left| \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} \right|$$

Aplicando esta definición general al caso concreto de sistemas dinámicos continuos obtenemos la siguiente expresión:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Ln \left| \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Ln \left| \frac{f(x_{k-1} + \xi_{k-1}) - f(x_{k-1})}{\xi_{k-1}} \right| =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Ln |f'(x_{n-1})|$$

Por tanto cualquier error inicial se multiplicará por e^λ en cada iteración, de modo que si el exponente es positivo las órbitas cercanas se alejarán (sensibilidad a las condiciones iniciales). De ello se deduce que cualquier sistema caótico ha de tener al menos un exponente de Liapunov positivo (un sistema de dimensión m tendrá m exponentes de Liapunov). No se entrará en más detalles técnicos, pero por ejemplo en WIGGINS (2003: 726-735) puede encontrarse una descripción algo más completa.

De hecho la sensibilidad a las condiciones iniciales es probablemente la característica más relevante del caos, de modo que algunos científicos definen los sistemas caóticos simplemente como aquellos que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales.

2. **Transitividad o mezclado.** Una función $f: V \rightarrow V$ presenta transitividad si dados dos conjuntos cualesquiera U y W pertenecientes a V , tras un número de iteraciones suficientemente grande siempre encontraremos condiciones iniciales de U que llevan a W . En términos menos formales el significado de esta propiedad es simplemente que las órbitas que partan cerca de cualquier punto deben errar por todas partes.

3. **Puntos periódicos densos.** Se dice que una función tiene puntos periódicos densos si para cualquier condición inicial existe otra arbitrariamente próxima que es periódica. Esta propiedad implica que existen infinitas soluciones periódicas inestables asociadas a un atractor extraño, de modo que las órbitas que entran en el atractor se acercan a dichas soluciones periódicas y permanecen en sus proximidades hasta que su naturaleza inestable hace que las órbitas escapen hacia otra solución periódica.

Resulta interesante comprobar cómo sistemas aparentemente sencillos muestran este tipo de propiedades, comportándose de modo caótico pese a la simplicidad de su formulación. La ecuación logística discreta por ejemplo, puede escribirse como $x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, y pese a su aparente sencillez muestra un comportamiento caótico para valores de a mayores de 3.5699, el llamado Punto de Feigenbaum. Sin embargo en sistemas autónomos continuos el comportamiento caótico sólo aparece para tres o más dimensiones (BAKER y GOLLUB, 1994: 3). Esto se debe

al Teorema de Poincaré-Bendixson, que garantiza la no existencia de caos en sistemas autónomos planos. De hecho puede hacerse la siguiente clasificación de dimensiones mínimas para encontrar comportamiento caótico (FERNÁNDEZ PÉREZ *et al.*, 2003: 679):

- Sistemas dinámicos discretos del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ con f arbitraria: Dimensión 1. Éste es el caso de la ecuación logística discreta.

- Sistemas dinámicos discretos del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ con f invertible: Dimensión 2.

- Sistemas dinámicos continuos del tipo $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ con f arbitraria: Dimensión 3. Es importante destacar que la forma de la ecuación implica que este resultado hace referencia a sistemas autónomos sin retardos.

Sin embargo es preciso hacer una matización muy importante respecto a los sistemas continuos. Estos sistemas, como ya se ha indicado, sólo pueden presentar comportamiento caótico si contienen al menos tres variables independientes, pero en el caso de incluir retardos la situación cambia drásticamente. Este último tipo de modelos, muy empleados en dinámica de poblaciones y en la simulación de procesos psicológicos, pueden manifestar un comportamiento caótico en dimensión 1. Es decir, una ecuación de la forma $dx(t) / dt = f(x(t), x(t - \tau))$ puede exhibir todas las propiedades de los sistemas caóticos (OLSEN y DEGN, 1985). La ecuación de Mackey-Glass (ver por ejemplo LOSSON *et al.*, 1993) que se muestra en la figura 4.6 pertenece a este tipo de modelos.

Pero también existen versiones con retardo de los modelos de difusión que se estudiarán más adelante. Por ejemplo existe una versión de la ecuación logística que incluye estos efectos (SCHAFFER y KOT, 1986: 160):

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t) \cdot (1 - x(t - \tau))$$

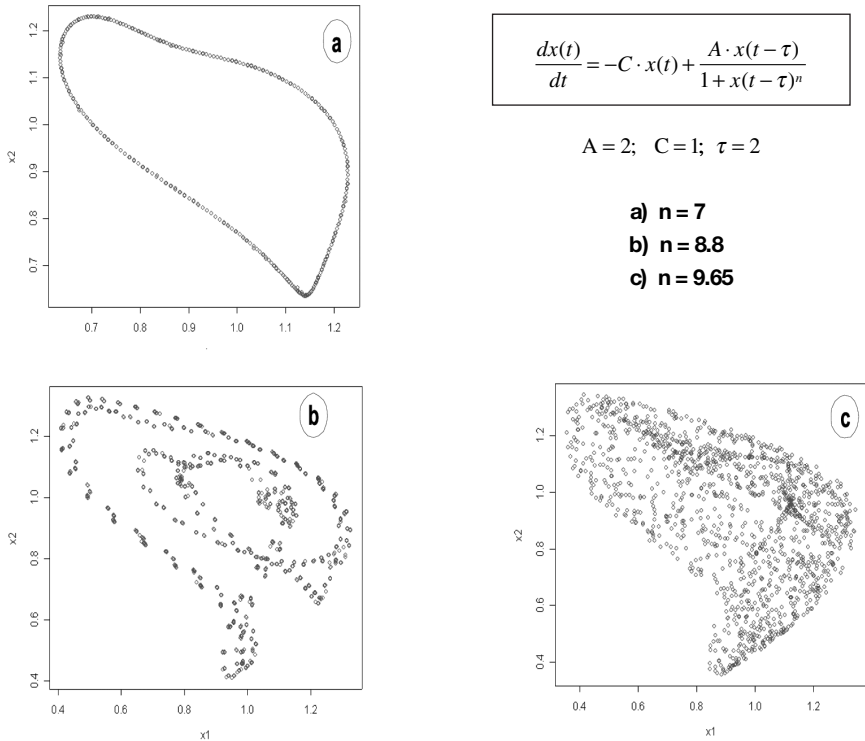
Aunque este modelo sólo admite como soluciones puntos fijos y ciclos límite, otros modelos relacionados sí que presentan comportamiento caótico. MAY (1980) desarrolló un modelo sobre la evolución de la población de ballenas que presenta ciertas similitudes con el anterior.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -D \cdot x(t) + B \cdot x(t - \tau) \cdot (1 - x(t - \tau))^Z$$

Esta ecuación para $Z < 2 \cdot [(B / D) - 1]$ siempre tiene como solución un punto fijo con independencia del valor de τ . Sin embargo para valores $D = 1$, $\tau = 2$ y $B = 2$, exhibe una pauta de duplicación de perí-

FIGURA 4.6

COMPORTAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE MACKEY-GLASS
PARA DISTINTOS VALORES DE UNO DE SUS PARÁMETROS⁵



Fuente: Elaboración Propia (algoritmo programado en «R»).

odos a medida que se incrementa el valor de Z , llegando a comportarse de forma aparentemente caótica para ciertos valores de este parámetro. A partir de dichos valores, un incremento de Z lleva de nuevo al sistema a una solución periódica relativamente sencilla. Aunque matemáticamente resulta interesante conocer sus propiedades, la estimación de los parámetros con datos reales sitúa al sistema en la zona en la que existe únicamente un punto fijo, de modo que el modelo no predice fluctua-

⁵ Debido a la simplicidad de la ecuación se ha optado por la resolución numérica mediante el algoritmo de Euler con paso 0.01 (para sistemas más complejos se emplearán métodos más avanzados). Aunque las órbitas son continuas, se ha decidido representar los puntos que corresponden a cada uno de los pasos del algoritmo, puesto que para valores altos del parámetro, el dibujo de las trayectorias continuas hacía sumamente confusa la imagen. Dado que sólo se pretende poner de manifiesto el comportamiento cualitativo de la ecuación, y asumiendo el error que supone dibujar un mapa de fases de un sistema continuo mediante una secuencia de puntos, pensamos que esta representación resulta más ilustrativa.

ciones irregulares cuando es aplicado al problema real de la evolución de la población de ballenas.

Por último es preciso mencionar que en ocasiones pueden emplearse ecuaciones integrodiferenciales (MURRAY, 2002: 14; BRAUER y CASTILLO-CHÁVEZ, 2001: 109-113) que permiten incorporar el efecto de todo el comportamiento pasado. Puede servir de ejemplo una modificación de la ecuación logística:

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^t w(t-s) \cdot x(s) \cdot ds \right)$$

En este caso no sólo se incorpora el efecto de la variable x con un determinado retardo, sino que se considera todo el comportamiento pasado de dicha variable, ponderado por una función de peso $w(t)$. Típicamente esta función de ponderación tenderá a cero para valores muy grandes tanto positivos como negativos y alcanzará su máximo en un determinado momento τ . Propuestas similares existen en el caso de sistemas dinámicos de orden superior, como por ejemplo en los modelos depredador-presa de tipo Lotka-Volterra (ver DAVIS, 1962: 413).

Éste es un caso general que incluye como casos particulares las ecuaciones diferenciales con retardo, ya que si se considera como función de pesos la delta de Dirac se obtiene de forma inmediata una ecuación de este último tipo, puesto que:

$$\int_{-\infty}^t \delta(t-\tau-s) \cdot x(s) \cdot ds = x(t-\tau)$$

5. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

La resolución analítica de una ecuación diferencial ordinaria no lineal es habitualmente bastante complicada, y en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales (como los que se tratarán en el capítulo VI) la resolución analítica es imposible en la mayoría de los casos. Por este motivo es preciso emplear métodos numéricos de resolución que convenientemente programados proporcionen la solución de la ecuación o sistema de ecuaciones.

El planteamiento de este tipo de métodos es el siguiente: sea el problema de valor inicial $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, del que suponemos que tiene solución única $\psi(t)$ donde $t_0 \in (a, b)$ y f es una función continua

en $[a, b]$. Los métodos numéricos proporcionarán una secuencia de valores $\{t_j, x_j\}$ tal que el valor x_j constituye una aproximación al valor de la solución en el punto t_j .

A continuación se presentarán los principales métodos numéricos que se emplean en la simulación de sistemas dinámicos, de modo que se estudiarán sus características e implementación, así como sus ventajas e inconvenientes. El análisis se centrará en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que los modelos que trataremos en este libro son de este tipo.

A) El Método de la Serie de Taylor

Es uno de los métodos más antiguos de resolución de ecuaciones diferenciales, y está basado en el desarrollo en Serie de Taylor, por lo que es preciso suponer que existen varias derivadas parciales de $f(t, x)$. El algoritmo iterativo se escribe del siguiente modo:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!} x''(t) + \frac{h^3}{3!} x'''(t) + \dots + \frac{h^k}{k!} x^{(k)}(t)$$

El valor inicial de x viene dado por las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y las derivadas de x se calculan a partir de $f(t, x)$, puesto que al ser $x' = f(t, x)$, la segunda derivada la obtenemos como $x'' = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)$ y así sucesivamente. Es preciso notar que como x es una función que depende de t , será necesario aplicar la regla de la cadena para el cálculo de las derivadas de $f(t, x)$. El parámetro h es el paso que utiliza el algoritmo para ir incrementando el valor de t , de modo que a valores de h más pequeños se obtendrá una mayor precisión a cambio de un incremento del coste computacional.

Además del error de redondeo como consecuencia de la precisión computacional (número de dígitos almacenados), se comete un error de truncamiento que depende del valor k elegido, quedando definido del siguiente modo:

$$E_k = \frac{1}{(k+1)!} h^{k+1} x^{(k+1)}(t+\theta h) \text{ siendo } 0 < \theta < 1$$

La principal ventaja de este procedimiento es su sencillez conceptual, así como el hecho de que en aquellos casos en los que es sencillo calcular las derivadas de $f(t, x)$ puede usarse un método de orden elevado logrando una gran precisión en los resultados. Respecto a sus incon-

venientes está la necesidad de que existan dichas derivadas parciales además del trabajo preliminar de cálculo, que puede ser laborioso en muchos casos.

B) El Método de Euler

Presenta la ventaja de no tener que calcular las derivadas de $f(t, x)$, aunque a cambio sea preciso trabajar con unos pasos muy pequeños para lograr una buena precisión, lo que incrementa el coste computacional del algoritmo. Su expresión formal es la siguiente:

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot f(t, x(t))$$

En problemas sencillos este método puede resultar útil, aunque para sistemas algo complejos no es una aproximación válida: el tiempo de cálculo requerido sería excesivamente grande.

C) Los métodos de Runge-Kutta

Como hemos visto, el método de Taylor requiere cálculos previos que pueden resultar muy laboriosos mientras que el método de Euler obliga a trabajar con valores de h muy pequeños. Los métodos de RUNGE (1851-1927) y KUTTA (1867-1944) solucionan en parte estos problemas, lo que los convierte en uno de los métodos más empleados. Su expresión formal es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=0}^p w_i k_i$$

siendo p el orden del método y w_i constantes. Las k_i se calculan de manera sucesiva del siguiente modo:

$$k_i = h \cdot f \left(t_n + \alpha_i h, x_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right) \text{ siendo } \alpha_1 = 0, \text{ es decir:}$$

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(t_n + \alpha_2 h, x_n + \beta_{21} k_1)$$

....

$$k_p = h \cdot f(t_n + \alpha_p h, x_n + \beta_{p1} k_1 + \beta_{p2} k_2 + \dots + \beta_{p(p-1)} k_{p-1})$$

El cálculo de los α_i , β_{ij} y w_i se realiza desarrollando en serie de Taylor x_{n+1} e identificando coeficientes de h en la ecuación $x_{n+1} = x_n + \sum_{i=0}^p w_i k_i$.

a) *Runge-Kutta de segundo orden* ($p = 2$)

Se trata del método de Runge-Kutta más simple, y en general ya proporciona resultados razonables para problemas que no resulten excesivamente complejos. Existen varias posibilidades en función del valor de α_2 que se elija:

- **Método de Euler modificado** ($\alpha_2 = 1/2$)

$$x_{n+1} = x_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f_n \right)$$

- **Método de Heun** ($\alpha_2 = 1$)

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f_n + f(t_n + h, x_n + hf_n))$$

- **Método óptimo** ($\alpha_2 = 2/3$)

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4} f_n + \frac{3}{4} hf \left(t_n + \frac{2}{3} h, x_n + \frac{2}{3} hf_n \right)$$

Los métodos de Runge-Kutta de orden superior se calculan de igual forma, obteniéndose distintas posibilidades en función de la elección de parámetros. Para orden 3 tenemos por ejemplo los métodos de Nyström, clásico, de Heun y el cuasi óptimo. Para orden 4 el método clásico y el de Kutta. Los coeficientes correspondientes a estos métodos son tediosos de calcular por lo que no se entrará en los detalles técnicos, pero una vez hallados su programación resulta muy sencilla.

b) *Runge-Kutta de cuarto orden* ($p = 4$)

Probablemente el método de Runge-Kutta más empleado es el de orden 4 que se detalla a continuación:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$$

Siendo

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n) \\
 k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
 k_4 &= h \cdot f(t_n + h, x_n + k_3)
 \end{aligned}$$

Este método tiene un error total de orden $O(h^4)$, siempre y cuando la solución tenga las cinco primeras derivadas continuas. Con este algoritmo se obtienen unos resultados bastante buenos incluso para problemas relativamente complejos, al tiempo que su implementación resulta muy sencilla en cualquier lenguaje de programación:

Entrada: Función $f(t, x)$ y valores iniciales t_0 y x_0 .

Paso 1: Hacer $t = t_0$ y $x = x_0$.

Paso 2: Para $n = 1, 2, \dots, m$

- Calcular k_1, k_2, k_3 y k_4 .

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_n + h, x_n + k_3)$$

- Calcular $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$ y $t_{n+1} = t_n + h$.

Salida: Array (t, x)

D) Otros métodos

Existen otros métodos alternativos, como los multipaso que consideran la información recibida desde el principio de la integración, es decir, para calcular la solución en el punto $n+1$ requieren información no sólo del punto n sino también de uno o más puntos anteriores. Entre

ellos destacan los métodos de Adams-Bashforth (especialmente los de segundo y cuarto orden) y los métodos predictor-corrector (como por ejemplo el trapezoidal modificado, el de Adams-Bashforth-Moulton y el de Milne).

6. CONCLUSIONES

De este capítulo también merece la pena destacar tres ideas básicas:

- Podemos definir un sistema dinámico como un conjunto de elementos caracterizados por una serie de variables que se relacionan entre sí mediante ecuaciones matemáticas, siendo el objetivo determinar la evolución temporal de dichas variables.

- El carácter interdisciplinar de los conceptos, modelos y principios de la Teoría de Sistemas Dinámicos permite modelar sistemas muy diversos. En concreto se trata de una herramienta especialmente útil para estudiar los mercados de redes debido a su capacidad para representar procesos realimentados.

- La resolución analítica de los sistemas dinámicos es imposible en la mayoría de los casos. Por este motivo es preciso emplear métodos numéricos de resolución que convenientemente programados proporcionen la solución de la ecuación o sistema de ecuaciones. Existen softwares comerciales que permiten hacerlo, aunque resulta relativamente sencillo programar los algoritmos en un lenguaje estándar como «C», «Fortran» o «R».