

CAPÍTULO V

MODELOS UNIDIMENSIONALES (DIFUSIÓN)

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es desarrollar una revisión de los distintos modelos de difusión tecnológica compatibles con la evolución de un producto de red. La mayoría de los modelos tratados son sistemas unidimensionales de tipo autónomo, y como se comprobará a lo largo del capítulo, algunos de ellos pueden exhibir un comportamiento caótico por ser de tipo integrodiferencial / con retardos. Se realizará una revisión de los modelos más importantes, aunque sin entrar demasiado en cada uno de ellos. De este modo el lector dispondrá de una visión general y podrá, si lo desea, profundizar recurriendo a la bibliografía correspondiente.

1. INTRODUCCIÓN

La difusión de innovaciones, que puede definirse como la diseminación de una nueva idea desde su fuente de creación hasta los usuarios finales (ROGERS, 1962: 76), es sin duda uno de los elementos característicos de la sociedad actual, de modo que si bien se trata de un tema que lleva siendo estudiado desde hace mucho tiempo, sigue estando en plena vigencia. Los modelos matemáticos desarrollados para representar procesos de difusión tecnológica son cada vez más elaborados y complejos, pero es posible distinguir dos grandes grupos. Los primeros consideran no sólo la difusión temporal sino también la espacial, es decir, incluyen en sus ecuaciones términos que expresan cómo se difunde la

tecnología en el tiempo y en el espacio. La expresión general de una ecuación de difusión de este tipo es la siguiente (FIEDLER y SCHEEL, 2000: 24):

$$\partial u / \partial t = D \cdot \Delta u + f(\bar{x}, u, \nabla u)$$

Siendo u la cuota de mercado de la tecnología, y \bar{x} un vector que representa las dimensiones espaciales consideradas. Esta ecuación es empleada con profusión en disciplinas tan distintas como la física, las matemáticas, la química o la ingeniería, y existen también algunas aplicaciones al ámbito de la economía.

El segundo tipo de modelos constituye una versión simplificada en la que se considera únicamente la dimensión temporal, y éste será el tipo de modelos en el que se centrará este capítulo. En el caso de considerar únicamente la dimensión temporal las ecuaciones correspondientes quedarían expresadas del siguiente modo:

$$\frac{du}{dt} = f(u) \quad \text{Sistemas autónomos}$$

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad \text{Sistemas no autónomos}$$

Estas formulaciones permiten una cantidad ingente de modelos alternativos, pero la propia naturaleza de las Externalidades de Red sugiere algunas condiciones que limitan el número de modelos a estudiar. Por ejemplo, tal y como se ha mencionado anteriormente, la evolución típica de una tecnología sujeta a Efectos de Red es de tipo sigmoïdal o en «s». Por este motivo el presente capítulo se dedicará a analizar modelos de difusión con este tipo de evolución temporal, obviando aquéllos como el exponencial (FOURT y WOODLOCK, 1960) o el Mitcherlich que no presentan dicho comportamiento.

Por otra parte, aunque la revisión que se desarrolla en este capítulo tratará los modelos más relevantes, se prestará especial atención al logístico y sus numerosas variantes por varios motivos:

1. **Su formulación es sencilla y sus propiedades bien conocidas.** Además el ajuste de la función a los datos es relativamente simple y no requiere, en muchos casos, recurrir a cálculos laboriosos.

2. **Muchos de los modelos de difusión se relacionan con el modelo logístico básico.** Adicionalmente se han desarrollado una gran cantidad de variantes del mismo y la flexibilidad que muestran mediante el ajuste de distintos parámetros permite representar procesos de difusión de forma muy adecuada.

3. **La generalización a modelos de competencia está basada en muchos casos en la curva logística o sus variantes**, como ocurre por ejemplo con el modelo de Lotka-Volterra.

2. MODELOS DE DIFUSIÓN DE TIPO SIGMOIDAL: ELEMENTOS BÁSICOS

En lo que se refiere a la aparición de los modelos de difusión, KUZNETS (1930) fue el primero en proponer una evolución temporal de tipo sigmoideal para el proceso de cambio tecnológico, aunque desde ese momento numerosos estudios han confirmado dicha hipótesis. En la actualidad, los modelos de ciclo de vida, muy relacionados con los de difusión (MARTÍN-CARRILLO, 2000: 70-72), así como los modelos de difusión propiamente dichos se emplean con profusión en múltiples ámbitos de estudio como la Dirección Estratégica, la Dirección de la Producción, la Economía Industrial o el Marketing (NIETO ANTOLÍN, 1997).

Es frecuente asumir que la distribución no acumulada de frecuencias correspondiente a un proceso de difusión que siga una evolución temporal de tipo sigmoideal es aproximadamente normal (BELLO ACEBRÓN, 1984), siendo posible distinguir entre cinco grupos de usuarios en función de su propensión a adquirir el producto innovador (ROGERS, 1962: 168-171): innovadores, primeros adoptantes, mayoría precoz, mayoría tardía y rezagados (ver Figura 5.1). Y de hecho esta clasificación sigue empleándose en la actualidad (ver por ejemplo el estudio empírico sobre la difusión de juegos on-line en Taiwan de CHENG *et al.*, 2004). No obstante, como señalan MAHAJAN *et al.*, (1990b), esta hipótesis resulta cuestionable en la práctica, de modo que se han desarrollado otras distribuciones para la clasificación de adoptantes, como la propuesta por PETERSON (1973) o la de MAHAJAN y PETERSON (1985) que se muestra en la figura 5.2.

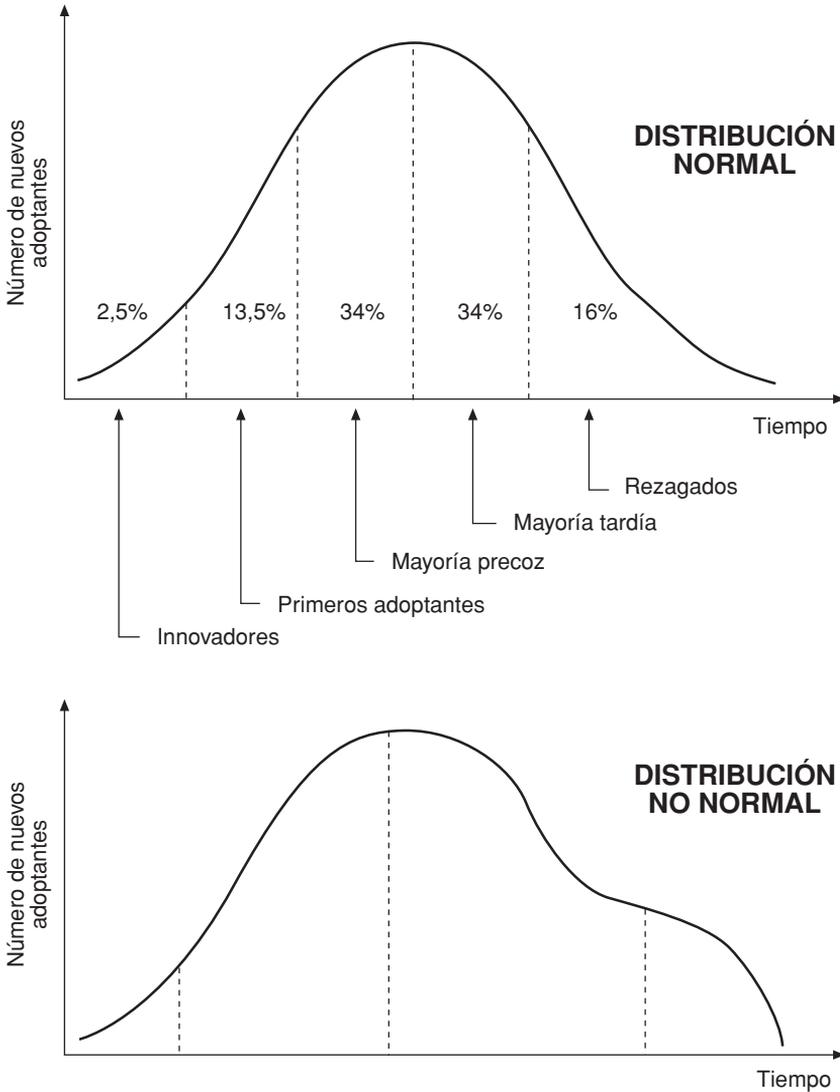
La estructura general de los modelos de difusión es la propuesta por MAHAJAN y PETERSON (1978a) y MAHAJAN y MULLER (1979), que identifica tres segmentos de mercado diferentes:

- **Mercado sin explotar:** $S_1(t) = P(t) - \tilde{N}(t)$, siendo $P(t)$ el número total de individuos en el mercado. Representa por tanto un conjunto de individuos que por diversas razones no puede ser considerados como mercado potencial.

- **Mercado potencial:** $S_2(t) = \tilde{N}(t) - N(t)$, siendo $\tilde{N}(t)$ el mercado potencial total.

- **Mercado actual:** $N(t)$ el número de usuarios que ya han adoptado la tecnología.

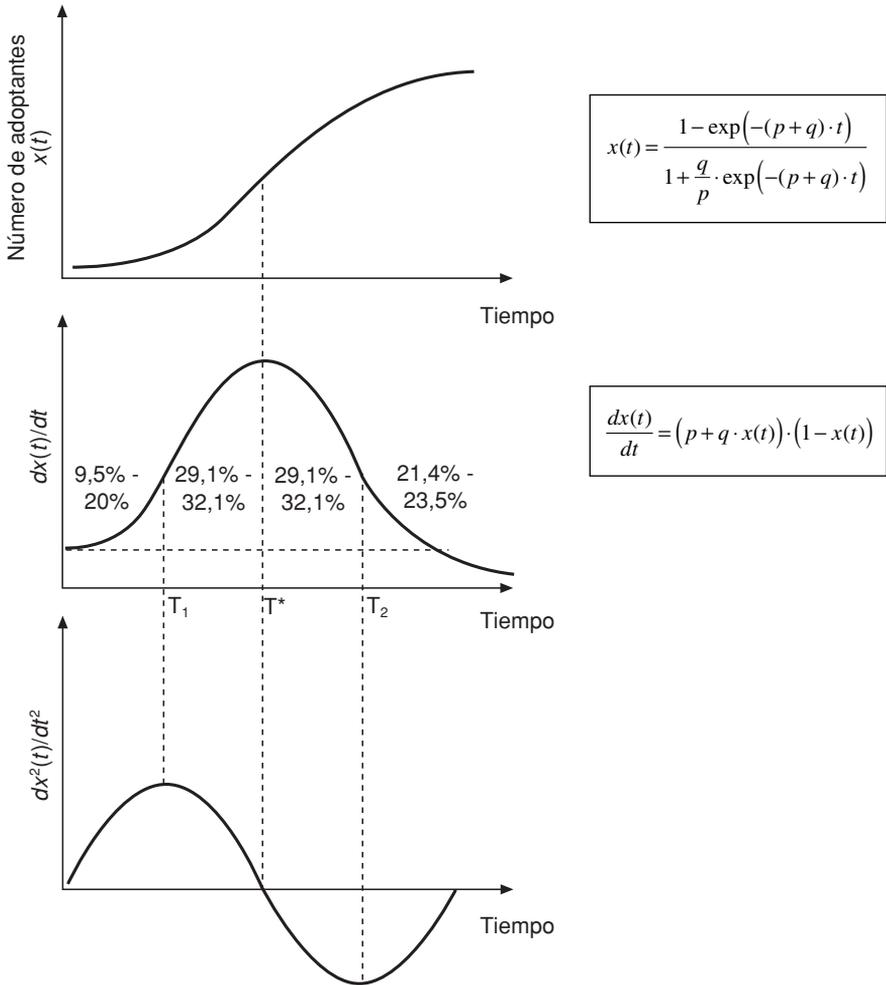
FIGURA 5.1
 CATEGORÍAS DE ADOPTANTES PARA UN PROCESO
 DE DIFUSIÓN DE TIPO SIGMOIDAL SEGÚN ROGERS (1962: 162)



Fuente: Adaptado de ROGERS (1962: 162).

El número de individuos en uno u otro segmento variará a lo largo del tiempo, pero obviamente en cualquier instante t se verifica que $S_1(t) + S_2(t) + N(t) = P(t)$. Llamando $\tilde{n}(t)$ al número de individuos que pasan del mercado sin explotar al mercado potencial en el instante t , $n(t)$ al

FIGURA 5.2
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS NO ACUMULADAS
PARA UN PROCESO DE DIFUSIÓN SEGÚN EL MODELO DE BASS



Fuente: MAJAN *et al.*, (1990b).

número de individuos que pasan del mercado potencial a adquirir la tecnología y $p(t)$ al incremento del mercado total, tenemos que:

$$S_1(t+1) = S_1(t) + p(t) - \tilde{n}(t)$$

$$S_2(t+1) = S_2(t) + \tilde{n}(t) - n(t)$$

$$N(t+1) = N(t) + n(t)$$

3. MODELOS DE DIFUSIÓN DE TIPO SIGMOIDAL: UNA REVISIÓN TEÓRICA

En este apartado se tratarán varios tipos de modelos:

- **Modelos no lineales.** Del tipo $x(t) = f(t)$, siendo $f(t)$ una función no lineal.

- **Modelos linealizados.** Del tipo $f(x(t)) = a + b \cdot t$. El término linealizado, como es usual en Econometría, hace referencia a la variable dependiente t , puesto que en general f no será lineal. El atractivo de este enfoque es facilitar la estimación de parámetros, que en ese caso puede hacerse mediante una regresión lineal (MEADE y ISLAM, 1998). Muchos de estos modelos son una versión de los modelos no lineales.

- **Modelos Autorregresivos.** Del tipo $x(t) = f(x(t - 1))$. Al igual que en el caso de los linealizados, muchas veces se trata de adaptaciones de algunos de los modelos no lineales. La ventaja de este planteamiento es que se simplifican los cálculos numéricos.

Por otra parte los modelos pueden ser de tres tipos: **simétricos** si su punto de inflexión se alcanza cuando el número de adoptantes llega al 50 por 100, **asimétricos** en caso contrario y **flexibles** si, dependiendo del valor de sus parámetros, su punto de inflexión se ubica en un rango de valores que comprende el 50 por 100, pudiendo comportarse por tanto como simétricos y asimétricos.

La mayoría de los modelos que se estudiarán son Sistemas Autónomos, dado que su estructura es $dx(t)/dt = f(x(t))$, aunque también se tratará alguno no autónomo como el Modelo Stanford que presenta una estructura del tipo $dx(t)/dt = f(x(t), t)$.

Por tanto, como puede verse, es posible clasificar los distintos modelos según criterios muy distintos:

- Según su **especificación funcional**: no lineales, linealizados y autorregresivos.

- Según las **dimensiones** consideradas: temporales o espaciotemporales.

- Según su **forma**: simétricos, asimétricos y flexibles.

- Desde un punto de vista **matemático**: autónomos y no autónomos.

- Según su **estructura**: de tipo logístico, de tipo logístico generalizado, de tipo estadístico, etc. (ver por ejemplo la clasificación de MARTÍN-CARRILLO, 2000).

- Etc.

Incluso es posible proponer otros criterios de clasificación, como por disciplina en la que surge el modelo, por número de parámetros que incluye, etc. En la práctica resulta complicado elegir una clasificación que resulte idónea, de modo que cada investigador opta por aquella que le parece más adecuada o simplemente no se proporciona clasificación alguna. En este libro plantearemos una clasificación basada en el número de parámetros y las relaciones entre los modelos. Más adelante se detallarán las ventajas de este enfoque.

Veamos ahora cuáles son las características de los modelos más relevantes de difusión tecnológica, para proceder posteriormente a su clasificación.

A) Modelo Gompertz

En 1825, GOMPERTZ introdujo una familia de funciones capaces de representar el crecimiento demográfico en una determinada región, sustentado en la hipótesis de que se produce un crecimiento exponencial del número de muertes entre la madurez sexual y la vejez (OLSHANSKY y CARNES, 1997). Este modelo y sus distintas variantes han sido usados desde entonces con profusión en biología y campos afines, publicándose en la actualidad numerosos trabajos basados en ellos.

Su aplicación a la modelización de procesos de difusión de innovaciones ha dado lugar a la aparición de distintas investigaciones que han demostrado la utilidad de dicho modelo, como por ejemplo los trabajos de FRANSES (1994) y MORRISON (1996). De hecho junto con el logístico ha sido de los más empleados para el estudio de los procesos de crecimiento (RAESIDE, 1988).

El modelo matemático supone que la velocidad de difusión depende del número de adoptantes en cada momento $x(t)$ y de la diferencia de logaritmos entre el número máximo de potenciales usuarios, N , y el número de adoptantes:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot [Ln(N) - Ln(x(t))] = \beta \cdot x(t) \cdot Ln \frac{N}{x(t)}$$

También, al igual que ocurre con el resto de modelos, es posible expresar la ecuación en tanto por uno, lo que elimina la necesidad de trabajar con la constante N . En adelante éste será el criterio que se adopte en la mayoría de los casos para escribir las ecuaciones.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot Ln \frac{1}{x(t)}$$

Al contrario de lo que ocurre en el modelo logístico, la velocidad de difusión no es simétrica, sino que alcanza su máximo cuando el número de adoptantes es N/e ($1/e$ si lo expresamos en tanto por uno), siendo e la base de los logaritmos neperianos (aproximadamente 2.718), de modo que el punto de inflexión de la curva no se alcanza en el punto medio. Esto se comprueba fácilmente hallando el máximo de la velocidad de difusión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\beta \cdot x(t) \cdot \text{Ln} \frac{N}{x(t)} \right] = \beta \cdot \text{Ln} \frac{N}{x(t)} - \beta \cdot x(t) \cdot \frac{x(t)}{N} \cdot \frac{N}{x(t)^2} = \\ &= \beta \cdot \left[\text{Ln} \frac{N}{x(t)} - 1 \right] = 0 \\ \text{luego } x(t) &= \frac{N}{e} \end{aligned}$$

Calculando la segunda derivada se verifica que efectivamente se trata de un máximo.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\beta \cdot \left[\text{Ln} \frac{N}{x(t)} - 1 \right] \right] = -\beta \cdot \frac{x(t)}{N} \cdot \frac{N}{x(t)^2} = -\frac{\beta}{x(t)} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]_{x=\frac{N}{e}} &= -\frac{\beta \cdot e}{N} < 0 \quad \Rightarrow x = \frac{N}{e} \quad \text{Es un máximo} \end{aligned}$$

Por tanto la curva definida por la ecuación de Gompertz inicialmente crece más deprisa que la logística. La resolución de la ecuación diferencial resulta relativamente sencilla efectuando el cambio de variable $u = \text{Ln}(N/x)$. Derivando se obtiene que $du = -(1/x) \cdot dx \Rightarrow dx = -x \cdot du$. Por otra parte la ecuación de Gompertz puede escribirse como $dx = \beta \cdot x \cdot \text{Ln}(N/x) \cdot dt$, y combinando ambas expresiones tenemos que $du = -\beta \cdot u \cdot dt \Rightarrow u = e^{-\beta \cdot t + k}$, con lo que la solución a la ecuación diferencial queda:

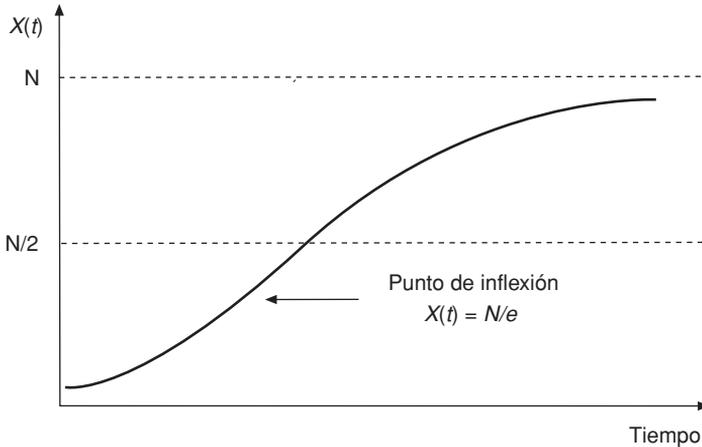
$$x(t) = N \cdot e^{-e^{-\beta t + k}}$$

O expresado en tanto por uno:

$$x(t) = e^{-e^{-\beta t + k}}$$

La figura 5.3 muestra gráficamente la evolución temporal que proporciona el modelo Gompertz de difusión.

FIGURA 5.3
MODELO GOMPERTZ BÁSICO



Fuente: Adaptado de MARTÍN-CARRILLO (2000: 106).

La versión lineal de la ecuación de Gompertz (que se calcula de forma trivial tomando logaritmos), ha sido empleada por ejemplo por YOUNG (1993) y se expresa del siguiente modo:

$$\text{Ln}[-\text{Ln}(x(t))] = a + b \cdot t$$

Existen versiones revisadas que incorporan un mayor número de parámetros para incrementar su flexibilidad, como por ejemplo el propuesto por WEISSTEIN (1999: 748):

$$x(t) = a \cdot b^{-a^t}$$

En esta misma línea el modelo de Gompertz generalizado (LEE *et al.*, 1992) cuenta con cuatro parámetros, de modo que la ecuación final de evolución viene dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = \exp\left[-\exp\left[-\left((\alpha + \beta \cdot t)^{1/\lambda} + \gamma\right)\right]\right]$$

Haciendo $\lambda = 1$ y $\gamma = 0$ se obtiene el Gompertz básico.

Este planteamiento supone que, dentro de la estructura general de MAHAJAN y MULLER que se analizaba al principio del capítulo, no se produce una variación a lo largo del tiempo del mercado potencial puesto que N permanece constante. En este sentido CHOW (1967) propuso una

modificación del modelo permitiendo que el mercado potencial creciese con el tiempo, es decir, haciendo $N = N(t)$ y expresándolo como una regresión lineal doblemente logarítmica con dos variables independientes. Análogamente STONEMAN (1983: 70) modificó el planteamiento clásico haciendo $\beta = \beta(t)$, de modo que la solución a la correspondiente ecuación diferencial quedaría:

$$x(t) = e^{-e^{-\int \beta(t) dt}}$$

Por último indicar que existe una versión autorregresiva para el modelo de Gompertz, que viene dada por la siguiente expresión:

$$x(t) - x(t-1) = -b \cdot x(t-1) \cdot \text{Ln}(x(t))$$

$$b > 0$$

B) Modelo Gaussiano

Como se mencionaba al principio del capítulo, la distribución no acumulada de frecuencias de un proceso de difusión tecnológica se considera en muchos casos como aproximadamente normal, y por este motivo es lógico emplear un modelo de difusión que emplee precisamente una distribución Gaussiana, tal y como propone ROGERS (1962: 160-162). La velocidad de difusión del proceso viene dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Siendo μ la media y σ^2 la varianza del proceso. El porcentaje total de usuarios en un instante t determinado vendrá dado por la siguiente integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

Esta expresión tiene su punto de inflexión en $t = \mu$, siendo por tanto un modelo simétrico. Al igual que ocurría con el modelo Gompertz, es posible emplear una versión linealizada como hace STAPLETON (1976).

Aunque como señala MAR-MOLINERO (1980) este tipo de curvas pueden ser útiles para representar procesos de difusión, el interés para el caso que nos ocupa es limitado por varios motivos:

- La interpretación del modelo en términos de Externalidades de Red no es sencilla. Mientras que en otros modelos como el Logístico o Gompertz la ecuación diferencial presenta una estructura fácil de interpretar, no ocurre lo mismo con el modelo Gaussiano.

- Los resultados son similares a los obtenidos con el modelo Logístico, pero los cálculos son significativamente más complejos debido a que no existe primitiva de la integral indicada. Esto hace necesario emplear las tablas normalizadas que aparecen en los manuales de estadística (para la Gaussiana tipificada) o bien recurrir a la integración numérica.

C) Modelo Log-Normal

El modelo Log-Normal, usado por ejemplo por BAIN (1963), parte de una expresión similar al Gaussiano:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{t \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln(t) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

De modo que el porcentaje de usuarios en un momento determinado vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{y \sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln(y) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

Es preciso indicar que en este caso el límite inferior de integración es cero, puesto que el logaritmo no está definido para valores negativos. Por otra parte el punto de inflexión de la curva se produce en el punto $\exp(\mu - \sigma^2)$, de modo que presenta una mayor versatilidad que el modelo Gaussiano a la hora de representar una serie de datos reales, siendo de hecho un modelo flexible. No obstante, en lo que se refiere al presente trabajo, no constituye un modelo demasiado interesante, puesto que adolece de los mismos problemas que el Gaussiano.

CH) Modelo Weibull

La aplicación de este modelo flexible a un proceso de difusión fue propuesta en primera instancia por SHARIF e ISLAM (1980) y, análogamente a los modelos Gaussiano y Log-Normal, está basado en una función de tipo estadístico. En este caso la velocidad de difusión viene dada por la ecuación.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad \alpha, \beta, t > 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene de manera relativamente sencilla la siguiente expresión para el número de adoptantes en un momento determinado:

$$x(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad t, \alpha, \beta > 0$$

Los dos parámetros del modelo determinan una familia de curvas que puede aplicarse a gran cantidad de productos tecnológicos (KANG *et al.*, 1996), ya que se trata de un modelo flexible. E incluso son posibles formulaciones más sofisticadas con tres parámetros que la dotan de una mayor versatilidad:

$$x(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad t, \tau, \alpha, \beta > 0$$

Lo interesante de este último modelo es que se incorpora el concepto de retardo a través del parámetro τ ; efectivamente la especificación funcional de esta ecuación implica que existe una relación entre el número de adoptantes y la situación en un tiempo pasado definido por $t - \tau$. Ésta es una idea relevante que será empleada con posterioridad.

Además de la aplicación al caso que nos ocupa, los modelos de Weibull se han empleado en infinidad de problemas de la más variada índole, tanto en ingeniería y física como en ciencias sociales. En el manual de MURTHY *et al.*, (2004: 13) puede encontrarse un exhaustivo listado de trabajos basados en esta distribución.

D) Modelo Log-Recíproco

Se trata de un modelo de difusión relativamente sencillo usado por ejemplo por MCCARTHY y RYAN (1976), y que se representa mediante las siguientes ecuaciones:

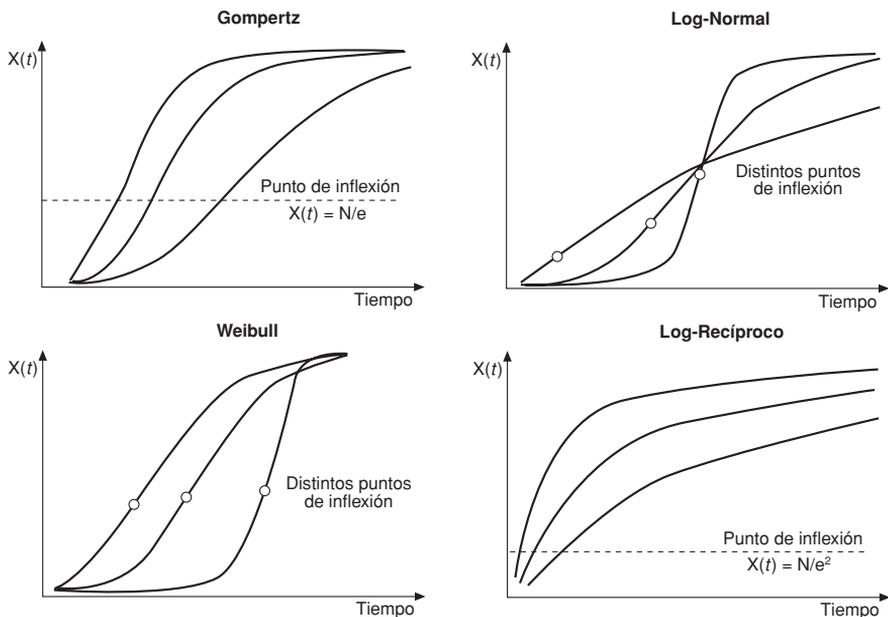
$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{b \cdot t^2} \exp\left[-\frac{1}{b \cdot t}\right] \quad b > 0$$

$$x(t) = \exp\left[-\frac{1}{b \cdot t}\right] \quad b > 0$$

En este caso, al igual que ocurría con el modelo Gompertz, existe un único punto de inflexión para toda la familia de curvas en el punto $x(t) = 1/e^2$, como puede comprobarse de forma análoga a como se hizo en el caso de la curva Gompertz, aunque en esta ocasión es preciso derivar respecto al tiempo para después sustituir en la expresión de $x(t)$. Tenemos entonces una familia de curvas asimétricas con la peculiaridad de presentar un crecimiento bastante rápido en su primer tramo, así como un cambio de concavidad muy temprano.

A modo de ejemplo, la figura 5.4 compara el comportamiento de algunas de las curvas estudiadas hasta este momento para distintos valores de sus parámetros, indicando dónde se produce el cambio de concavidad.

FIGURA 5.4
COMPORTAMIENTO DE DISTINTOS MODELOS DE DIFUSIÓN



Fuente: Adaptado de MEADE e ISLAM (1998).

E) Modelo Gamma

La distribución Gamma también puede ser empleada para modelizar procesos de difusión. La expresión de la velocidad de adopción es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x(t)^{p-1} \cdot e^{-a \cdot x(t)}$$

$$a, p > 0$$

$$x > 0$$

Donde Γ es la función de Euler definida por $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$.

Aunque para valores de p enteros positivos es posible integrar de forma analítica la ecuación diferencial, es habitual recurrir a tablas normalizadas o a la integración numérica.

La curva $x(t)$ así definida presenta una evolución temporal de tipo sigmoïdal para valores de p mayores que 1. Como ocurre con la mayoría de modelos de tipo estadístico, aunque el ajuste a los datos reales pueda ser bueno por la flexibilidad que le confieren sus parámetros, la interpretación en términos económicos no es sencilla.

F) Modelo Beta

La situación es similar al caso anterior. Eligiendo de forma adecuada el valor de los parámetros es posible lograr una evolución temporal de tipo sigmoïdal (FERNÁNDEZ-ABASCAL *et al.*, 1994: 455-458). Algunos modelos que se estudiarán más adelante como los de Jeuland o NSRL presentan una estructura muy similar a la del modelo gamma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} \cdot x(t)^{p-1} \cdot (1-x(t))^{q-1}$$

$$p, q > 0$$

$$x \in (0,1)$$

G) Modelo de Singh y Maddala

Este modelo fue propuesto por SINGH y MADDALA (1976) para estimar la distribución del volumen de ingresos de una compañía, siendo una generalización del modelo propuesto por FISK (1961) con este mismo objetivo y que a su vez se basaba en la distribución de Champernowne. No se trata por tanto de un modelo de difusión propiamente dicho, aunque como señala MARTÍN-CARRILLO (2000: 157-158) puede emplearse como tal. La formulación original de Singh y Maddala es la que se indica a continuación:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot t^{a_2-1}}{(1 + a_1 \cdot t^{a_2})^{a_3+1}}$$

$$x(t) = 1 - \frac{1}{(1 + a_1 \cdot t^{a_2})^{a_3}}$$

No obstante la interpretación de este modelo en términos de Externidades de Red también resulta complicada. Por este motivo, aunque la flexibilidad que le proporcionan sus tres parámetros permita un buen ajuste a los datos reales, no parece un buen candidato para el análisis del fenómeno que se pretende estudiar en este libro.

H) Modelo Adaptativo Polinómico

Propuesto por MARTÍN-CARRILLO (2000: 170-189), este modelo flexible presenta la ventaja de permitir una buena adaptación a muchos procesos de difusión de tecnologías, siendo la estimación de sus coeficientes relativamente sencilla.

$$\frac{dx(t)}{dt} = P_0 + 2 \cdot a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t^2 + 4 \cdot a_4 \cdot t^3$$

$$x(t) = x_0 + P_0 \cdot t + \sum_{i=2}^4 a_i \cdot t^i$$

x_0 se define como la Tecnología Latente y representa el porcentaje inicial de usuarios, mientras que P_0 se denomina Coeficiente del Efecto de la Innovación.

I) Modelo Logístico Básico

El modelo Logístico (y sus numerosas variantes) es probablemente el más empleado para la modelización de procesos de difusión, pese a las críticas que pueden hacerse a su planteamiento (ver por ejemplo SINDE CANTORNA, 2004: 28-34), y cuenta con numerosas aplicaciones en muchos otros campos, ya que por ejemplo es una de las funciones de activación más empleadas en sistemas de Redes Neuronales. Fue formulado inicialmente por VERHULST en 1838, aunque también se le conoce como modelo de Pearl, y ha sido aplicado con éxito, junto a sus diferentes variantes, en múltiples investigaciones sobre la difusión, como las de GRILICHES¹ (1957

¹ Sin embargo estos trabajos de GRILICHES fueron revisados por DIXON (1980) que demostró que la curva Gompertz resultaba una mejor aproximación debido precisamente a su asimetría.

y 1960), MANSFIELD (1961), TANNER (1978), TEECE (1980), RANDLES (1983) o POLO (1987).

Su formulación parte de un planteamiento relativamente sencillo: la velocidad de difusión de una tecnología es proporcional al número de adoptantes en el instante considerado y al número de potenciales adoptantes que aún no lo han hecho. Expresada en tanto por uno, tenemos que:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

$$\beta > 0$$

La primera parte del planteamiento recuerda a la Ley de Metcalfe, que como ya se ha mencionado propone que el valor para un usuario de conectarse a una red es proporcional al número de usuarios ya conectados (luego a más usuarios conectados mayor velocidad de difusión). La resolución de la ecuación diferencial proporciona la siguiente expresión para el número de adoptantes:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot (t - t_0))}$$

$$t_0 = -k / \beta$$

Siendo k la constante de integración a determinar según las condiciones iniciales. Por tanto t_0 es el instante en que se alcanza el 50 por 100 de la población máxima, es decir, $x(t_0) = 1/2$, mientras que β se denomina índice de expansión de la innovación y determina la velocidad con que se adopta la nueva tecnología.

La versión linealizada propuesta por MANSFIELD (1961) y posteriormente modificada por BLACKMAN (1974) presenta la siguiente estructura:

$$\text{Ln} \left(\frac{x(t)}{1 - x(t)} \right) = a + b \cdot t$$

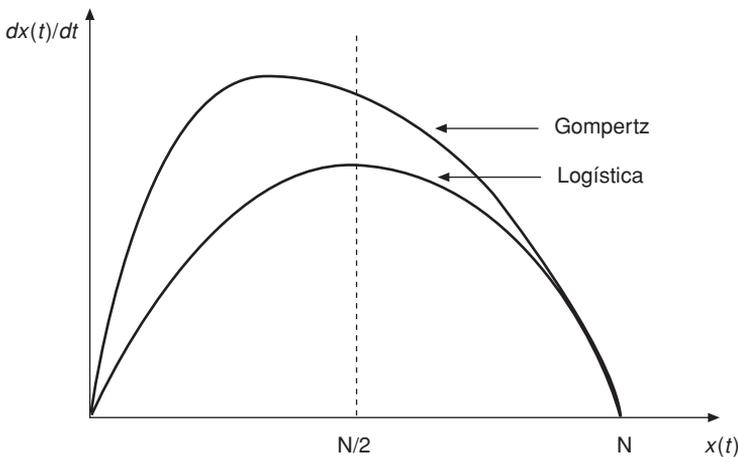
No obstante existen formulaciones alternativas que difieren únicamente en la forma de identificar cada uno de los coeficientes. Una de las más conocidas es la propuesta por FISHER y PRY en 1970, quienes plantearon una ecuación de sustitución tecnológica que realmente resultó ser exactamente la misma que la logística, como se demuestra realizando unos sencillos cambios de variable (MARTÍN-CARRILLO, 2000: 91-93). La expresión que plantearon es la siguiente:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tgh} \left(\frac{\beta}{2} \cdot (t - t_0) \right) \right)$$

La logística es una curva simétrica, como se calcula fácilmente de forma análoga a la planteada en el modelo Gompertz, con su punto de inflexión en $x(t) = 1/2$ ($N/2$ si consideramos número de usuarios y no porcentaje). La figura 5.5 muestra una comparativa en la evolución de la velocidad de difusión de la ecuación logística y la de Gompertz.

Un detalle de suma importancia es que, aunque la formulación discreta de la ecuación logística $x_{n+1} = \alpha \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, presenta un comportamiento caótico para valores de α mayores de 3.5699, su formulación continua no tiene este comportamiento, ya que como se indicó al estudiar los sistemas dinámicos, en el caso continuo sin retardos sólo es posible hallar un comportamiento caótico para dimensión igual o mayor que tres.

FIGURA 5.5
VELOCIDAD DE DIFUSIÓN
DE LAS ECUACIONES LOGÍSTICA Y GOMPERTZ



Fuente: MARTÍN-CARRILLO (2000: 83).

J) Modelo Logístico Local

Una modificación especialmente interesante del modelo Logístico básico es la propuesta por MEADE (1988) con su denominado modelo logístico local, que introduce un esquema de tipo autorregresivo incorporando en la ecuación de predicción los valores observados en el

instante anterior. La formulación de este modelo simétrico es la siguiente:

$$x(t) = \frac{x(t-1) \cdot \exp(b)}{1 + x(t-1) \cdot (\exp(b) - 1)}$$

$$b > 0$$

ISLAM y MEADE (1996) probaron que esta formulación resulta en ocasiones más adecuada que la logística básica para realizar predicciones en entornos cambiantes.

K) Modelo Logístico de Chow

Se trata de una modificación del modelo logístico básico que pretende dotarlo de mayor flexibilidad. Como ya se mencionó al estudiar la curva de Gompertz, CHOW (1967) propuso una modificación de dicho modelo permitiendo que el mercado potencial creciese con el tiempo, es decir, haciendo $N = N(t)$. La modificación a la logística que se estudia en este apartado está enfocada de forma similar.

Como se acaba de indicar, una de las hipótesis del modelo logístico era que la constante de proporcionalidad en la ecuación diferencial, β , era precisamente constante, de modo que la idea consiste en permitir que varíe con el tiempo, siendo por tanto $\beta = \beta(t)$. La formulación del modelo es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta(t) \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(z) \cdot dz\right)}$$

En términos económicos esta variación en el tiempo de β permite incluir en el modelo los cambios en la predisposición de los potenciales usuarios a adquirir la tecnología, por lo que sin duda supone una aproximación más realista, aunque implica determinar una función para β , dificultando así la estimación del modelo. Por este motivo parece razonable emplear funciones $\beta(t)$ sencillas de integrar, como hace HERNES (1976) proponiendo una expresión del tipo $\beta(t) = k \cdot b^t$.

Empleando funciones polinómicas, que resultan muy sencillas de integrar, es posible obtener soluciones con un mayor número de pará-

metros, lo que puede contribuir a un mejor ajuste de los datos reales, quedando la expresión del número de adoptantes del siguiente modo:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\sum_{i=0}^k a_i \cdot t^i\right)}$$

L) Modelo de Paloheimo y Dickie

PALOHEIMO y DICKIE (1965) formularon una ecuación de crecimiento muy general que puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = H \cdot x(t)^d - k \cdot x(t)^n$$

La flexibilidad que le permiten sus cuatro parámetros hace que sea en realidad una de las ecuaciones más generales que puedan plantearse, ya que recoge como casos particulares la logística básica y muchos de los modelos que se estudiarán a continuación, como el de Bertalanffy y NSRL. Resulta complicado estudiar sus propiedades en términos generales, y por este motivo se analizarán en su lugar los casos particulares que se han indicado, considerando valores concretos de sus parámetros.

M) Modelo de Bass

Este modelo formulado por BASS (1969) plantea que determinados individuos adoptan una nueva tecnología por motivaciones propias, independientemente de la decisión del resto de potenciales usuarios; éstos son los llamados innovadores. El resto de adoptantes se moverían por un efecto imitación (o interpretado en términos de Externalidades de Red, porque al incrementarse el número de usuarios aumenta para ellos el valor de adquirir la tecnología). Por este motivo BASS propuso una modificación a la ecuación logística básica que recogiese ambos efectos.

El planteamiento matemático del modelo es relativamente similar al de la logística, aunque incorpora un término adicional para incluir el comportamiento de los innovadores:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))$$

$$p, q > 0$$

$$x(t) = \frac{1 - \exp(-(p+q) \cdot t)}{1 + \frac{q}{p} \cdot \exp(-(p+q) \cdot t)}$$

Por tanto el modelo puede interpretarse como la suma de dos efectos: el de los innovadores, definido por una exponencial modificada ($p \cdot (1 - x(t))$) y el de los imitadores, definido por una logística básica ($q \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$). En este sentido es interesante introducir los conceptos de coeficiente interno y externo de influencia propuestos por LEKVALL y WAHLBIN (1973). Para ello se expresará el modelo de Bass de la siguiente forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = p \cdot (1 - x(t)) + q \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

El primer término, como ya se ha indicado, refleja el comportamiento de los innovadores, e indica una conversión a porcentaje constante p . Éste es el denominado coeficiente de influencia externa o innovación. El segundo término implica una influencia de los adoptantes sobre los no adoptantes similar a un proceso de contagio, de modo que la constante de proporcionalidad q es el denominado coeficiente de influencia interna o imitación. Por tanto se asume que existen dos categorías de individuos, imitadores e innovadores, que presentan una respuesta diferente a la introducción de un nuevo producto.

No obstante algunos autores como TANNY y DERZKO (1988) sugieren que esta interpretación del modelo de Bass es incorrecta y que realmente el modelo sólo refleja la interacción entre adoptantes y no adoptantes, de modo que q no es un coeficiente de imitación para un individuo sino que refleja la intensidad de adopción como consecuencia de la interacción adoptantes–no adoptantes, al tiempo que p indica el efecto de todos los demás factores que incitan a la adopción de la tecnología, como los medios de comunicación y las políticas de venta (ISLAM *et al.*, 2002). De esta manera desaparece la dicotomía innovadores / imitadores y se sustituye por la hipótesis de una población homogénea de potenciales adoptantes.

En cualquier caso, al margen de la interpretación de los coeficientes de influencia, se trata de un modelo de tipo flexible con un punto de inflexión que está comprendido entre 0 y 0.5 dependiendo del valor de los parámetros p y q , lo que se comprueba fácilmente de forma análoga a la propuesta en el modelo Gompertz. Concretamente el cambio de concavidad se produce en el punto $x(t) = (q - p) / (2 \cdot q)$.

Sin embargo, aunque se trata de un modelo empleado en un gran número de investigaciones, tal y como señalan HEELER y HUSTAD (1980)

presenta una serie de limitaciones, como cierta inestabilidad si la estimación de sus parámetros se basa en una serie corta de datos y problemas predictivos en las primeras etapas del crecimiento.

El modelo básico presenta además el problema de que para $t = 0$ el porcentaje de adoptantes ha de ser necesariamente cero. Por ello se ha sugerido una formulación ligeramente modificada que da lugar a una ecuación que permite una población inicial no nula (MEADE e ISLAM, 1998):

$$x(t) = \frac{1 - c \cdot \frac{P}{q} \cdot \exp(-(p+q) \cdot t)}{1 + c \cdot \exp(-(p+q) \cdot t)}$$

$$p, q > 0$$

También se han desarrollado otra serie de variantes para tratar de introducir supuestos más realistas, como por ejemplo añadiendo coeficientes de influencia crecientes o decrecientes en vez de constantes (MAHAJAN *et al.*, 1990a; MARTÍN-CARRILLO, 2000: 141-143). En esta misma línea MAHAJAN y PETERSON (1978a) desarrollaron un modelo dinámico basado en el de Bass permitiendo que el número máximo de adoptantes fuese variable en vez de constante, de modo que la velocidad de difusión (en número de adoptantes) venía dada por la expresión:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (f(P(t)) - x(t))$$

Siendo f una función lineal del tipo $f(P(t)) = k_1 + k_2 \cdot P(t)$, y $P(t)$ la población máxima o mercado total que se definía en la primera parte del capítulo, que en este caso se modeliza también como una ecuación de Bass.

NORTON y BASS (1987) extendieron el modelo básico para incorporar la idea de distintas generaciones del producto compitiendo entre sí. Si se considera únicamente un modelo con dos generaciones las ecuaciones resultantes son las siguientes:

$$N_1(t) = m_1 \cdot x_1(t) \cdot (1 - x_2(t - \tau))$$

$$N_2(t) = (m_2 + m_1 \cdot x_1(t)) \cdot x_2(t - \tau)$$

Donde N_i representa el número de adopciones de la generación i -ésima (en este caso generaciones 1 y 2) en el instante t , y x_i es el porcentaje de adoptantes de cada generación, de modo que las x_i siguen un comportamiento dado por la ecuación de Bass. El parámetro τ repre-

senta el momento en que se lanzó la segunda generación del producto. Este modelo puede ser generalizado de forma sencilla al caso de tres o más generaciones sucesivas.

Una última variante elemental que merece la pena mencionar es el modelo empleado por GANESH y KUMAR (1996) y GANESH *et al.*, (1997), que partiendo del modelo de Bass introduce una pequeña modificación para considerar el efecto que tiene en la difusión tecnológica entre países el aprendizaje (recordemos la importancia de las denominadas Externidades de Red de aprendizaje):

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + c \cdot k \cdot y(t)) \cdot (1 - x(t))$$

Donde $y(t)$ es el ratio de penetración en el mercado de donde surge la innovación y $x(t)$ el ratio de penetración en el mercado donde se está introduciendo. En este caso c representa el coeficiente de aprendizaje.

A continuación se estudiarán otras variantes algo más sofisticadas del modelo de Bass básico que merecen ser analizadas de manera independiente.

N) Modelo de Bass con deserciones

BIDGES *et al.*, (1993), estudiando el número de productos que podían competir en un determinado mercado tecnológico, desarrollaron un modelo similar al de Bass, que es también aplicable a los procesos de difusión de tecnologías. La modificación consiste en incorporar un término adicional que puede ser interpretado como la tasa de deserciones, es decir, el porcentaje de adoptantes que abandonan la tecnología, quedando el modelo expresado mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= (\lambda_e + \lambda_i \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t)) - \mu \cdot x(t) \\ x(t) &= \frac{a \cdot (1 - c \cdot \exp(t \cdot b)) - b \cdot (1 + c \cdot \exp(t \cdot b))}{2 \cdot \lambda_i \cdot (1 - c \cdot \exp(t \cdot b))} \\ a &= -\lambda_e + \lambda_i - \mu \\ b &= (4 \cdot \lambda_e \cdot \lambda_i + a^2)^{1/2} \end{aligned}$$

El punto de inflexión de esta curva se encuentra en el punto $x(t) = (\lambda_i - \lambda_e - \mu) / (2 \cdot \lambda_i)$, de modo que estamos ante una curva asimétrica, puesto que $\lambda_i, \lambda_e, \mu > 0$.

El interés de este modelo radica en que incorpora la posibilidad de considerar que cierto porcentaje de usuarios decide prescindir de la tecnología tras haberla adquirido, relegando así la hipótesis implícita en el modelo de Bass de que un adoptante continúa siéndolo indefinidamente. Sin embargo en términos de Externalidades de Red probablemente sería más realista considerar una tasa de deserción decreciente en vez de constante como la que propone este modelo.

Ñ) Modelo de Bass con tres etapas

JAIN *et al.*, (1991) propusieron una modificación al modelo de Bass básico que incorporaba las restricciones en la cadena de suministros. El planteamiento consiste en asumir que existe un determinado número de usuarios que desean adquirir la tecnología y están a la espera de obtenerla debido a restricciones de abastecimiento, de modo que se identifican tres grupos de individuos dentro del modelo: potenciales adoptantes, usuarios a la espera de adquirir la tecnología habiéndola solicitado y adoptantes. La formulación en tanto por uno es la siguiente:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dx(t)}{dt} = (p + q_1 \cdot A(t) + q_2 \cdot x(t)) \cdot (1 - A(t) - x(t))$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t) \cdot A(t)$$

$z(t)$: Suma del número de adoptantes y usuarios en lista de espera.

$A(t)$: Usuarios en lista de espera.

$x(t)$: Número de adoptantes

$C(t)$: Coeficiente de suministro, que relaciona el número de adoptantes y el de usuarios en lista de espera.

El interés de este modelo radica en el hecho de que como señalan ISLAM y FIEBIG (2001), en muchos casos existen restricciones en la cadena de suministros que impiden adquirir un determinado producto de forma inmediata, como ocurre por ejemplo en algunos países con el teléfono. Sin embargo este modelo de difusión está constituido por un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión dos, lo que dificulta su resolución.

O) Modelo de Bass con efectos publicitarios

SIMON y SEBASTIAN (1987) propusieron una serie de seis modelos basados en la formulación discreta del modelo de Bass para incorporar

el efecto de la publicidad en los coeficientes de influencia externa e interna. Resulta relativamente sencillo expresar en términos continuos su propuesta, quedando las siguientes expresiones:

Modelo de Innovación (se modifica el coeficiente de innovación p)

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + \alpha \cdot f(A)) \cdot (1 - x(t))$$

Modelo de Imitación (se modifica el coeficiente de imitación q)

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + \beta \cdot f(A) \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))$$

Donde $f(A)$ es una función cóncava de tipo logarítmica que depende de la publicidad realizada, A , proponiendo los autores tres especificaciones alternativas:

Modelo de un único período

$$f(A) = \gamma \cdot \text{Ln}(A(t - \tau))$$

$$\tau \geq 0$$

Modelo de varios períodos

$$f(A) = \sum_{\tau=0}^T \gamma_{\tau} \cdot \text{Ln}(A(t - \tau))$$

Modelo de Nerlove

$$f(A) = \lambda \cdot \sum_{\tau=0}^T \gamma_{\tau} \cdot \text{Ln}(A(t - \tau))$$

En el que los pesos siguen una distribución Beta, de modo que:

$$\gamma_{\tau} = \frac{(r + s - 1)!}{(r - 1)! \cdot (s - 1)!} \tau^{r-1} \cdot (1 - \tau)^{s-1}$$

La combinación de los dos modelos de Bass modificados con los tres modelos publicitarios propuestos da lugar a seis modelos diferentes. El estudio de SIMON y SEBASTIAN muestra que estas modificaciones mejoran ligeramente la predicción respecto al modelo de Bass clásico, al tiempo que confirman el retraso que se produce en la respuesta publicitaria de los consumidores.

P) Modelo de Floyd

Este modelo fue propuesto por FLOYD (1968) para representar la evolución de innovaciones industriales y presenta la siguiente estructura:

$$\frac{dx(t)}{dt} = b \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))^2 \quad b > 0$$

Siendo la solución en este caso

$$\frac{1}{1 - x(t)} + Ln\left(\frac{x(t)}{1 - x(t)}\right) = a + b \cdot t \quad b > 0$$

Como puede comprobarse la ecuación diferencial de partida es similar a la logística, aunque elevando al cuadrado el segundo término de la expresión. Se trata una curva asimétrica con punto de inflexión fijo en $x(t) = 0.33$ (MAHAJAN *et al.*, 1990a), es decir, en un punto intermedio entre el modelo de Gompertz (0.37) y el Log-Reciproco (0.135). La versión Autorregresiva del modelo queda expresada de la siguiente forma:

$$x(t) - x(t-1) = b \cdot x(t-1) \cdot (1 - x(t-1))^2$$

$$b > 0$$

Q) Modelo de Sharif y Kabir

Se trata de una combinación del modelo de Mansfield de la logística linealizada y el de Floyd, y fue propuesta por SHARIF y KABIR (1976) para la difusión de innovaciones industriales. Presenta unas propiedades similares a la curva de Gompertz (KANG *et al.*, 1996), aunque se trata de un modelo flexible y su punto de inflexión depende del valor de los parámetros, estando acotado entre 0.33 y 0.5 (MAHAJAN *et al.*, 1990a).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))^2}{1 - x(t) \cdot (1 - \sigma)}$$

$$b > 0$$

$$\sigma \in [0, 1]$$

$$\frac{\sigma}{1 - x(t)} + Ln\left(\frac{x(t)}{1 - x(t)}\right) = a + b \cdot t \quad b > 0$$

También cuenta con una versión Autorregresiva propuesta por MAHAJAN *et al.*, (1993).

$$x(t) - x(t-1) = \frac{b \cdot x(t-1) \cdot (1 - x(t-1))^2}{1 - x(t-1) \cdot (1 - \sigma)}$$

$$b > 0$$

$$\sigma \in (0,1)$$

R) Modelo Stanford

Este modelo constituye una aproximación lineal al modelo Log-Normal, aunque también puede considerarse como una modificación del de Bass, empleando un coeficiente de influencia interna decreciente y un coeficiente de influencia externa igual a cero. Empleado por ejemplo por TEOTIA y RAJU (1986) su formulación es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{q}{t} \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{T}{t}\right)^q}$$

Donde T es el tiempo en el que se logra la mitad de la penetración en el mercado. Se trata de un modelo flexible con su punto de inflexión entre 0 y 0.5. Obsérvese que estamos ante un sistema no autónomo.

S) Modelo de Jeuland

Modelo propuesto por JEULAND (1981) que parte de la logística de Bass pero incorporando un parámetro adicional. Se trata de un modelo flexible con su punto de inflexión acotado entre 0 y 0.5. Presenta la siguiente estructura:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))^{1+\gamma}$$

$$p, q > 0$$

$$\gamma > -1$$

La versión Autorregresiva puede formularse del siguiente modo:

$$x(t) - x(t-1) = (p + q \cdot x(t-1)) \cdot (1 - x(t-1))^{1+\gamma}$$

$$p, q > 0$$

$$\gamma > -1$$

De hecho haciendo $p = \gamma = 0$ se obtiene la versión Autorregresiva del modelo logístico de Mansfield, que presenta un comportamiento simétrico.

$$x(t) - x(t-1) = b \cdot x(t-1) \cdot (1 - x(t-1))$$

$$b > 0$$

Haciendo $p = 0, \gamma = 1$ se obtiene la versión Autorregresiva del modelo de Floyd, que presenta una evolución asimétrica.

$$x(t) - x(t-1) = b \cdot x(t-1) \cdot (1 - x(t-1))^2$$

$$b > 0$$

T) Modelo FLOG

Este modelo, conocido también como Logística Flexible, es una generalización de la ecuación logística básica. Propuesto por Bewley y Fiebig (1988), se trata de un modelo de cuatro parámetros que puede verse también como una ecuación del tipo logística de Chow haciendo $\beta(t) = \phi \cdot f'(\mu, k, t)$. El modelo queda expresado del siguiente modo:

$$\text{Ln} \left(\frac{x(t)}{1-x(t)} \right) = \gamma + \phi \cdot f(\mu, k, t)$$

$$\text{siendo } f(\mu, k, t) = \frac{\left[(1+k \cdot t)^{\mu/k} - 1 \right]}{\mu}$$

Despejando $x(t)$ se obtiene la expresión siguiente:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp \left[-(\gamma + \phi \cdot f(\mu, k, t)) \right]} = \frac{1}{1 + c \cdot \exp \left[-\phi \cdot f(\mu, k, t) \right]}$$

Esta expresión recuerda a la logística básica, pero incorpora una función con dos parámetros adicionales que lo dotan de mayor flexibilidad. La ecuación diferencial de la que proviene esta expresión es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \phi \cdot f'(\mu, k, t) \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

$$\text{donde } \int_{t_0}^t \phi \cdot f'(\mu, k, s) \cdot ds = \phi \cdot f(\mu, k, t) + \gamma$$

Se trata de un modelo flexible cuyo punto de inflexión puede tomar todos los valores entre el 0 y el 1, al tiempo que permite distintos grados de simetría para un determinado punto de inflexión (MEADE e ISLAM, 1995).

En la práctica puede resultar difícil estimar los cuatro parámetros cuando se cuenta con un número limitado de datos, de modo que habitualmente se emplean cuatro casos particulares de tres parámetros:

Transformación Box-Cox. Haciendo $k = 1$

$$f(\mu, 1, t) = \frac{(1+t)^\mu - 1}{\mu}$$

Logística Exponencial (ELOG). Haciendo $k = 0$

$$f(\mu, 0, t) = \frac{e^{\mu t} - 1}{\mu}$$

Transformación de Potencia Inversa (IPT). Haciendo $\mu = 1$

$$f(1, k, t) = (1 + k \cdot t)^{1/k} - 1$$

Transformación de Potencia Logística Inversa (LIPT). Haciendo $\mu = 0$

$$f(0, k, t) = \frac{1}{k} \cdot \text{Ln}(1 + k \cdot t)$$

El modelo FLOG ha sido aplicado, por ejemplo, para estudiar la penetración de los CDs en la industria discográfica (BEWLEY y GRIFITHS, 2003).

U) Modelo NUI

El modelo de Influencia No Uniforme fue propuesto por EASINGWOOD *et al.*, (1983). Se trata de un modelo flexible cuyo punto de inflexión puede tomar todos los valores entre el 0 y el 1.

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)^\delta) \cdot (1 - x(t))$$

$$p, q > 0$$

SHARMA y BHARGAVA (1994) propusieron una mejora a este modelo, de modo que la expresión final, conocida como modelo NHNV, viene dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(p + q \cdot (n(t) + h \cdot n(t-1) + h^2 n(t-2) + \dots)^\delta \right) \cdot (1 - x(t))$$

donde $x(t) = n(t) + n(t-1) + \dots + n(2) + n(1)$

$$p, q > 0$$

$$h \in (0, 1)$$

V) Modelo NSRL

Modelo flexible propuesto por EASINGWOOD *et al.*, (1981) para cuantificar el cambio en la propensión a la imitación. Al igual que los modelos FLOG y NUI su punto de inflexión puede tomar todos los valores entre el 0 y el 1. Realmente es un caso particular del modelo NUI haciendo $p = 0$. Su formulación es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = q \cdot x(t)^\delta \cdot (1 - x(t))$$

La versión Autorregresiva del modelo suele expresarse del siguiente modo:

$$x(t) - x(t-1) = b \cdot x(t-1)^\delta \cdot (1 - x(t-1))$$

$$b, \delta > 0$$

W) Modelo de Bertalanffy

Modelo flexible propuesto por BERTALANFFY (1957) como una generalización de la logística básica. Su punto de inflexión puede encontrarse en todo el intervalo (0,1) dependiendo del valor de los parámetros.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b}{\alpha} \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)^\alpha)$$

$$\alpha \geq -1$$

$$x(t) = \frac{1}{\left[1 + c \cdot \exp(-b \cdot t)\right]^{1/\alpha}}$$

$$\alpha \cdot c > 0$$

Haciendo $\alpha = 1$ se obtiene el modelo logístico básico, mientras que si $\alpha \rightarrow 0$ se obtiene el Gompertz (MEADE e ISLAM, 1998). El modelo de Nelder (ver NELDER 1961 y 1962) es una reparametrización de este modelo, por lo que no puede ser considerado como un modelo independiente.

X) Modelo de Birch

Este modelo flexible propuesto por BIRCH (1999) parte del logístico básico para incorporar una serie de modificaciones que pretenden dotarlo de una mayor flexibilidad. Aunque fue planteada como una curva de crecimiento de especies botánicas y es prácticamente desconocido en la literatura sobre difusión de innovaciones, es sin duda aplicable a estos procesos por las propiedades matemáticas que presenta.

En la ecuación logística, si se calcula el valor de $t - t_0$, siendo t_0 el punto donde se alcanza la mitad del crecimiento, se obtiene la siguiente expresión:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot (t - t_0))} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \frac{\text{Ln}(x(t))}{\beta} - \frac{\text{Ln}(1 - x(t))}{\beta}$$

La propuesta de BIRCH consiste en incorporar un parámetro adicional que permite ajustar de forma más flexible la aceleración y deceleración del proceso de crecimiento de la curva, haciendo

$$t - t_0 = \frac{\text{Ln}(x(t))}{\beta} - \frac{c \cdot \text{Ln}(1 - x(t))}{\beta} + \frac{(c - 1) \cdot \text{Ln}(1/2)}{\beta}$$

La ecuación que define este tipo de crecimiento viene dada por la siguiente ecuación, que no puede resolverse por métodos analíticos, siendo necesario recurrir a técnicas de integración numérica:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))}{1 - x(t) + c \cdot x(t)}$$

Obviamente para $c = 1$ se obtiene la logística básica. Por otra parte, la velocidad de crecimiento máxima se alcanza en el punto $x(t) = 1/(\sqrt{c} + 1)$, de modo que para valores de c mayores que 1 la velocidad máxima se alcanza en un punto menor que 1/2 y para c menor que 1 ocurre lo

contrario. Por tanto se trata de un modelo flexible en el que el punto de inflexión puede localizarse en todo el rango de valores entre 0 y 1.

Y) Modelo de Michaelis-Mentel Generalizado

Se trata de un modelo propuesto por LÓPEZ *et al.*, (2000) para representar el aumento de peso de especies animales, y aunque no se tiene constancia de su aplicación como modelo de difusión de tecnologías, la sencillez en su formulación y la flexibilidad que permite lo convierte en un candidato interesante para la modelización de este tipo de fenómenos. La formulación del modelo es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{c \cdot t^{c-1}}{k^c + t^c} \cdot (1 - x(t))$$

$$c, k > 0$$

$$x(t) = \frac{x_0 \cdot k^c + t^c}{k^c + t^c}$$

k es en este caso el tiempo en el que se alcanza la mitad del crecimiento máximo, y x_0 el valor de la cuota de mercado en el instante inicial $t = 0$. Considerando $x_0 = 0$ se obtiene la ecuación original de Michaelis-Mentel.

Sólo para valores de c mayores que 1 la curva presenta una evolución de tipo sigmoideal, con lo que ésta es en la práctica una restricción adicional que debe imponerse al modelo, alcanzándose entonces el punto de inflexión en el punto

$$x(t^*) = \frac{(1+1/c) \cdot x_0 + (1-1/c)}{2}$$

Se trata por tanto de un modelo flexible cuyo punto de inflexión depende tanto del valor del parámetro c como de las condiciones iniciales x_0 .

Z) Otros modelos

a) Modelo KKKI

Propuesto por KUMAR y KUMAR (1992a) como un modelo flexible de sustitución tecnológica².

² Aunque el modelo fue propuesto en primera instancia en KUMAR y KUMAR (1992a), cronológicamente la primera publicación en la que fue mencionado es en KUMAR y KUMAR (1992b), debido al desfase en la publicación del primer trabajo.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{(p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))}{1 - b \cdot x(t)}$$

La versión Autorregresiva del modelo fue propuesta por KUMAR y KUMAR (1992a) en el mismo trabajo en el que plantearon el modelo original.

$$x(t) - x(t-1) = \frac{(p + q \cdot x(t-1)) \cdot (1 - x(t-1))}{1 - b \cdot x(t-1)}$$

$$p, q > 0$$

$$-1 \leq b \leq \frac{q}{p} - 1$$

Merece la pena mencionar que el modelo flexible de Skiadas (SKIADAS, 1986), es relativamente similar, aunque incorpora un parámetro adicional:

$$\frac{dx(t)}{dt} = b \cdot \frac{(g + x(t)) \cdot (1 - x(t))}{1 - x(t) + \sigma \cdot (g + x(t))}$$

b) *Modelo de Harvey*

El modelo fue propuesto por HARVEY (1984) y parte de la logística modificada, siendo al igual que ella, un modelo flexible³.

$$\text{Ln}(x(t)) - \text{Ln}(x(t-1)) = \text{Ln}\left(\frac{b \cdot c}{\alpha}\right) - b \cdot t + \text{Ln}(1 + \alpha) \cdot \text{Ln}(x(t-1))$$

$$b > 0$$

$$\alpha \geq -1$$

$$\alpha \cdot c \geq 0$$

c) *Modelo de Nicholson*

Realmente se trata de un modelo surgido en el ámbito de la biología teórica para explicar la evolución de poblaciones de la *Lucila Cuprina*, un tipo de moscardo (ver por ejemplo RUAN, 2004; BRAUER y CASTILLO-

³ El modelo original propuesto por HARVEY es en realidad el que viene dado por la ecuación $\text{Ln}(x(t)) = \rho \cdot \text{Ln}(x(t-1)) + \delta + \gamma \cdot t$, donde $\rho = (k-1)/k$ y $\gamma = \text{Ln}(k\beta\gamma\alpha^{1/k})$. Como puede comprobarse ambos modelos son equivalentes mediante una reparametrización.

CHÁVEZ, 2001: 119). Su interés radica en el hecho de que tiene una interpretación bastante natural en términos de difusión tecnológica y que además presenta un comportamiento caótico para ciertos valores de sus parámetros. Esto se debe a que, tal y como se comentó en el capítulo IV, al incorporar retardos la ecuación de difusión puede presentar este tipo de comportamiento. La formulación del modelo es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = P \cdot x(t - \tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t - \tau)}{x_0}\right] - \delta \cdot x(t)$$

No se entrará a describir la interpretación de este modelo en términos biológicos, pero se indicará a continuación cuál podría ser su interpretación en términos de difusión tecnológica. Para ello se distinguirá entre los dos componentes de la ecuación.

La primera parte $P \cdot x(t - \tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t - \tau)}{x_0}\right]$ resulta la más compleja de interpretar:

- En primer lugar aparecen retardos. Esto implica que desde que un usuario potencial toma conocimiento de la tecnología y decide adquirirla, transcurre un cierto tiempo antes de que efectivamente la compre.

- Por otra parte este elemento de la ecuación puede interpretarse en términos de comunicación boca-a-oído: cada usuario actual «convence» a otros potenciales consumidores de que adquieran la tecnología. Este modelo en cuestión asume que el número promedio de individuos a los que un usuario convence decae exponencialmente con el número de usuarios. Es decir, cuando hay pocos usuarios cada uno de ellos convence a un gran número de individuos, pero cuando hay un gran número de usuarios cada uno convence a un número mucho menor. Multiplicando el número de usuarios en el instante $t - \tau$ por el número de individuos a los que convence en promedio cada uno de ellos se obtiene el incremento en el número de usuarios.

- Respecto a las dos constantes su interpretación sería la siguiente: x_0 representa el número de usuarios para el que la tasa de crecimiento es máxima y P una constante que permite ajustar la exponencial (la eficacia del proceso de comunicación boca-a-oído).

La segunda parte de la ecuación, $\delta \cdot x(t)$, puede interpretarse como la tasa de clientes que abandonan la tecnología, exactamente igual que se hacía en el modelo de Bass con deserciones.

Este modelo, que ha sido estudiado en gran detalle por parte de los biólogos teóricos, puede representar un proceso de difusión tecnológica

de tipo sigmoidal para ciertos valores de sus parámetros, mientras que para otros su comportamiento es caótico, tal y como se muestra en la figura 5.6.

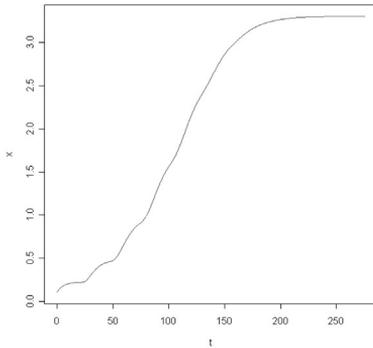
FIGURA 5.6

DISTINTOS COMPORTAMIENTOS DE LA ECUACIÓN DE NICHOLSON

$$\frac{dx(t)}{dt} = P \cdot x(t - \tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t - \tau)}{x_0}\right] - \delta \cdot x(t)$$

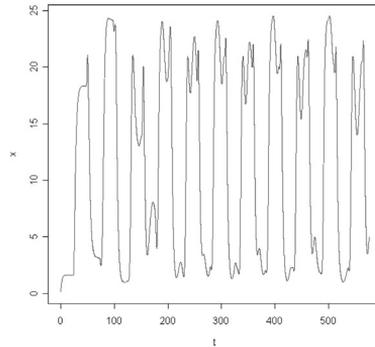
Difusión sigmoidal

$P = 0.4$; $x_0 = 4$; $\tau = 24$; $\delta = 0.175$



Comportamiento caótico

$P = 8$; $x_0 = 4$; $\tau = 24$; $\delta = 0.475$



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

d) Modelo de De Cesare y Di Liddo

Este último modelo se ha incluido a fin de poner de manifiesto las características que presentan los modelos que incluyen dimensiones espaciales. Su formulación es la siguiente (DE CESARE y DI LIDDO, 2000):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} &= q(p(t)) \cdot (I(z,t) + \gamma(t)) \cdot (1 - u(z,t)) \\ z &\in \Omega \\ t &\in [0, T] \end{aligned}$$

En este caso el número de adoptantes viene representado por $u(z,t)$ y z representa un punto del espacio, que toma valores en una región geográfica $\Omega \in R^2$. $p(t)$ es el precio de venta (que puede variar a lo largo del tiempo) y $q(p(t))$ es una función de respuesta al precio por parte de los consumidores, que típicamente será decreciente. $\gamma(t)$ representa el

efecto publicitario y $I(z, t)$ el efecto de la comunicación boca-a-oido (de hecho es un término que en un modelo sobre externalidades podría representar el efecto geográfico de las Externalidades de Red de aprendizaje). Este efecto de la comunicación boca-a-oido depende de una función $K(z, s)$ que representa el modo en que los adoptantes ejercen influencia en una zona a su alrededor.

$$I(z, t) = \int_{\Omega} K(z, s) \cdot u(s, t) \cdot ds$$

Es preciso destacar varios aspectos de este modelo:

- El modelo sugiere una expansión de la innovación en una determinada región geográfica (modelo de difusión espacio-temporal), que podría ser por ejemplo una ciudad o un país. Por este motivo el número de adoptantes depende tanto del tiempo t como del espacio z .

- Dado el coste unitario de la publicidad (c_a), el coste unitario de producción (c_p) y el factor de descuento (r) para actualizar los flujos financieros, se obtiene de forma inmediata una expresión para los beneficios actualizados de la empresa:

$$B = \int_0^T e^{-rt} \cdot \left((p(t) - c_p) \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \cdot dz - c_a \cdot \gamma(t) \right) \cdot dt$$

- La ecuación de difusión planteada es una ecuación integrodiferencial de las que se mencionaron en el capítulo IV al estudiar la Teoría de Sistemas Dinámicos.

- Se trata de un modelo de difusión de innovaciones que, como los propios autores comentan, está inspirado en gran medida en el campo de la biología teórica.

Realmente es posible encontrar infinidad de modelos con una evolución sigmoïdal, tanto en el ámbito de la Economía como de otras disciplinas (p.e. la Biología), y aunque se ha pretendido desarrollar una revisión exhaustiva, no es posible recoger todos los modelos existentes y cada una de sus variantes.

La revisión bibliográfica realizada garantiza que los más relevantes han sido incluidos, pero siempre existe la posibilidad de omitir modelos concretos empleados en algún trabajo puntual. De hecho se han identificado algunos modelos que finalmente no han sido incluidos por considerar que no aportaban demasiado al presente estudio, como el modelo extendido de Riccati (LEVENBACH y REUTER, 1976), la variante II del modelo de Kumar y Kumar (1992a), el modelo de Karshenas y Stoneman (1992), la variante del NUI propuesta por Molyneux y Shamroukh

(1996), los modelos de Chu (2000), surgidos en el ámbito de la Ingeniería Química, el modelo de crecimiento poblacional de Puu (2003: 204-209) o el modelo de Goudriaan y sus variantes (YIN *et al.*, 2003).

4. CLASIFICACIÓN Y SÍNTESIS DE MODELOS DE DIFUSIÓN

A modo de síntesis la tabla 5.1 recoge los 37 principales modelos analizados.

TABLA 5.1
SÍNTESIS DE MODELOS DE DIFUSIÓN ESTUDIADOS

Modelo	Ecuación	Referencias
Gompertz	$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot \text{Ln} \frac{1}{x(t)}$ $x(t) = \exp[-\exp(-\beta \cdot t + k)]$	FRANSES (1994), MORRISON (1996)
Gompertz. Variante de Chow	$\frac{dx(t)}{dt} = \beta(t) \cdot x(t) \cdot \text{Ln} \frac{1}{x(t)}$ $x(t) = \exp[-\exp(-\int \beta(z) \cdot dz)]$	CHOW (1967)
Gompertz. Variante de tres parámetros	$x(t) = a \cdot b^{-t^c}$	WEISSTEIN (1999; 748)
Gompertz. Variante de Lee <i>et al.</i>	$x(t) = \exp\left[-\exp\left[-\left((\alpha + \beta \cdot t)^{\nu\lambda} + \gamma\right)\right]\right]$	LEE <i>et al.</i> (1982)
Gaussiano	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	ROGERS (1962)
Log-Normal	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{t \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(\text{Ln}(t) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	BAIN (1963)
Weibull	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]$ $x(t) = 1 - \exp\left[-\left(t/\alpha\right)^\beta\right]$	SHARIF e ISLAM (1980)
Weibull con tres parámetros	$x(t) = 1 - \exp\left[-\left((t-\tau)/\alpha\right)^\beta\right]$	MURTHY <i>et al.</i> (2004; 9)
Log-Recíproco	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{b \cdot t^2} \exp\left[-\frac{1}{b \cdot t}\right]$ $x(t) = \exp\left[-1/b(b \cdot t)\right]$	MCCARTHY y RYAN (1976)
Gamma	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x(t)^{p-1} \cdot e^{-a \cdot x(t)}$	FERNÁNDEZ- ABASCAL <i>et al.</i> (1994; 448-452)
Beta	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} \cdot x(t)^{p-1} \cdot (1-x(t))^{q-1}$	FERNÁNDEZ- ABASCAL <i>et al.</i> (1994; 455-458)
Singh y Maddala	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot t^{a_2-1}}{(1+a_1 \cdot t^{a_2})^{a_3+1}}$ $x(t) = 1 - 1/(1+a_1 \cdot t^{a_2})^{a_3}$	SINGH y MADDALA (1976)

(Continúa)

TABLA 5.1 (Continuación)

Modelo	Ecuación	Referencias
Adaptativo Polinómico	$\frac{dx(t)}{dt} = P_0 + 2 \cdot a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t^2 + 4 \cdot a_4 \cdot t^3$	MARTÍN-CARRILLO (2000; 170-189)
Logístico	$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)) \quad x(t) = 1 / [1 + \exp(-\beta \cdot (t - t_0))]$	GRILICHES (1957 y 1960), MANSFIELD (1961)
Logístico. Variante de Chow	$\frac{dx(t)}{dt} = \beta(t) \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)) \quad x(t) = 1 / [1 + \exp(-\int \beta(z) \cdot dz)]$	HEMES (1976)
Paloheimo y Dickie	$\frac{dx(t)}{dt} = H \cdot x(t)^d - k \cdot x(t)^n$	PALOHEIMO y DICKEI (1965)
Bass	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t)) \quad x(t) = \frac{1 - \exp(-(p + q) \cdot t)}{1 + (q/p) \cdot \exp(-(p + q) \cdot t)}$	BASS (1969)
Bass. Variante para $x(0) \neq 0$	$x(t) = [1 - c \cdot (p/q) \cdot \exp(-(p + q) \cdot t)] / [1 + c \cdot \exp(-(p + q) \cdot t)]$	MEADE e ISLAM (1998)
Bass. Variante con efecto aprendizaje	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + c \cdot k \cdot y(t)) \cdot (1 - x(t))$	GANESH <i>et al.</i> (1997)
Bass con deserciones	$\frac{dx(t)}{dt} = (\lambda_e + \lambda_i \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t)) - \mu \cdot x(t)$	BIDGES <i>et al.</i> (1993)
Bass en tres etapas	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q_1 \cdot A(t) + q_2 \cdot x(t)) \cdot (1 - A(t) - x(t))$	JAIN <i>et al.</i> (1991)
Bass con efectos publicitarios (innovación e imitación)	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + \alpha \cdot f(A) \cdot (1 - x(t)))$ $\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + \beta \cdot f(A) \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))$	SIMON y SABASTIAN (1987)
Floyd	$\frac{dx(t)}{dt} = b \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))^2$	FLOYD (1968)
Sharif y Kabir	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))^2}{1 - x(t) \cdot (1 - \sigma)}$	SHARIF y KABIR (1976)
Stanford	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{q}{t} \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$	TEOTIA y RAJU (1986)
Jeuland	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))^{1+\gamma}$	JEULAND (1981)
FLOG	$\frac{dx(t)}{dt} = \phi \cdot f'(\mu, k, t) \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$	BEWLEY y FIEBIG (1988)
NUI	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)^\delta) \cdot (1 - x(t))$	EASINWOOD <i>et al.</i> (1983)
NHNV	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot (n(t) + h \cdot n(t-1) + h^2 n(t-2) + \dots)^\delta) \cdot (1 - x(t))$	SHARMA y BHARGAVA (1994)
NSRL	$\frac{dx(t)}{dt} = q \cdot x(t)^\delta \cdot (1 - x(t))$	EASINWOOD <i>et al.</i> (1981)

(Continúa)

TABLA 5.1 (Continuación)

Modelo	Ecuación	Referencias
Bertalanffy	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b}{\alpha} \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)^\alpha)$	BERTALANFFY (1957)
Birch	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))}{1 - x(t) + c \cdot x(t)}$	BIRCH (1999)
Michaelis-Mentel Generalizado	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{c \cdot t^{c-1}}{k^c + t^c} \cdot (1 - x(t))$	LÓPEZ <i>et al.</i> (2000)
KKKI	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{(p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))}{1 - b \cdot x(t)}$	KUMAR y KUMAR (1992a y 1992b)
Harvey	$Ln(x(t) - x(t-1)) = Ln\left(\frac{b \cdot c}{\alpha}\right) - b \cdot t + Ln(1 + \alpha) \cdot Ln(x(t-1))$	HARVEY (1984)
Nicholson	$\frac{dx(t)}{dt} = P \cdot x(t - \tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t - \tau)}{x_0}\right] - \delta \cdot x(t)$	RUAN (2004)
De Cesare y Di Liddo	$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = q(p(t)) \cdot \left(\int_{\Omega} K(z,s) \cdot u(s,t) \cdot ds + \gamma(t)\right) \cdot (1 - u(z,t))$ $I(z,t) = \int_{\Omega} K(z,s) \cdot u(s,t) \cdot ds$	De CESARE y Di LIDDO (2000)

Fuente: Elaboración propia

Como se mencionaba al principio del capítulo, resulta complicado establecer un criterio de clasificación, de modo que en este libro se ha optado por un criterio basado en el número de parámetros del modelo. Este criterio presenta dos ventajas fundamentales:

- Permite establecer una jerarquía en cuanto a la dificultad de ajuste con datos reales: lógicamente a mayor número de parámetros, mayor dificultad de ajuste y mayor necesidad de datos para que la estimación tenga validez estadística.

- Permite recoger de una forma sencilla las relaciones existentes entre los distintos modelos. Dichas relaciones se han ido mencionando a lo largo del capítulo, pero es relativamente sencillo esquematizarlas en una serie de tablas en las que la visualización sea más fácil.

Para establecer esta clasificación se ha seguido un proceso de dos etapas:

1. En primer lugar se han estructurado en dos tablas los modelos más relevantes (figuras 5.7 y 5.8). No se han incluido aquellos que tienen más de una variable, y tampoco los de tipo estadístico, debido a que como se ha comentado, estos últimos tienen una aplicación limitada al fenómeno de las Externalidades de Red por su difícil interpre-

tación. En estas tablas se ha establecido una jerarquía en función del número de parámetros que aparecen en la ecuación diferencial (que siempre será uno menos de los que finalmente deban calcularse, debido a la constante de integración), y se han indicado las relaciones que existen entre ellos.

2. En las figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se proponen una serie de modelos propios (en orden creciente de complejidad) que unifican a los anteriores, y que se han dibujado en un color diferente a fin de distinguirlos de los modelos originales. Respecto a estas tres últimas tablas es preciso mencionar lo siguiente:

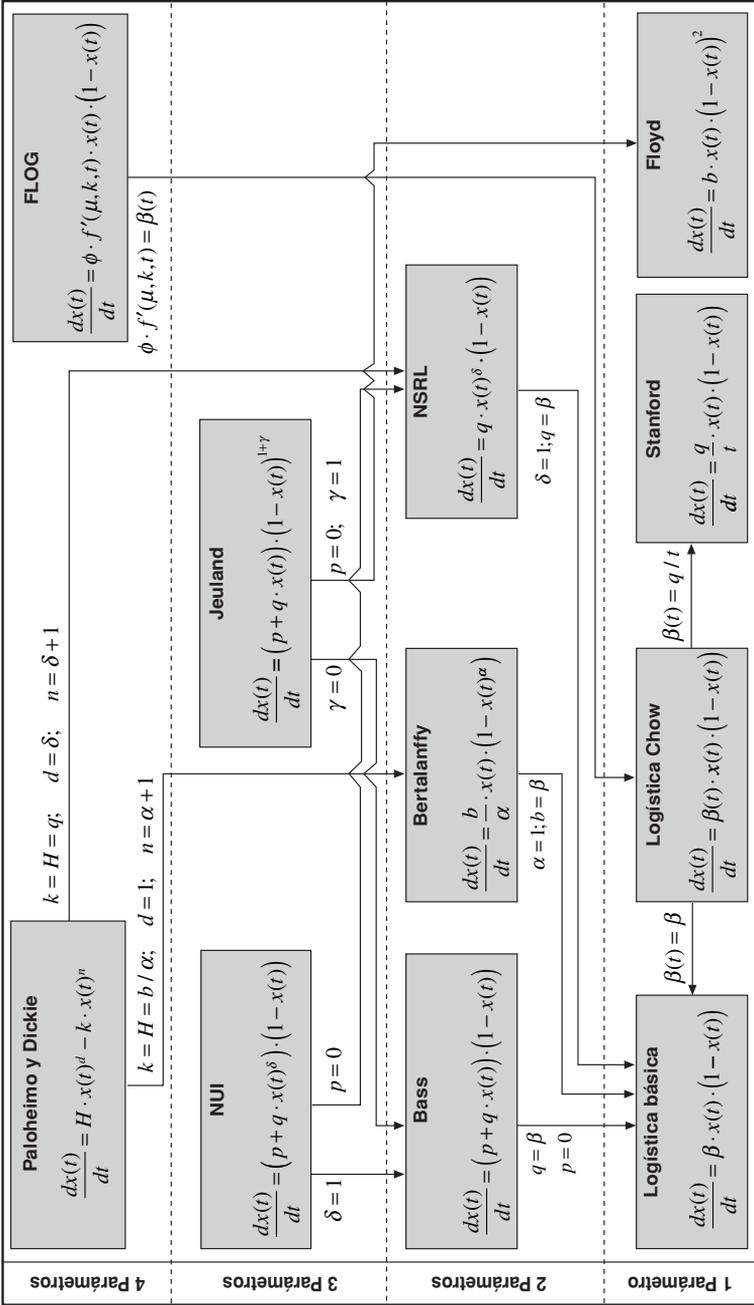
- En la práctica sería posible la unificación completa de todos los modelos mediante una ecuación con el suficiente número de parámetros, ya que bastaría con ir añadiendo factores multiplicativos elevados a un exponente hasta recoger todas las posibles variantes. Esto es lo que se hace, a modo de ejemplo, en el caso de la unificación de los modelos 6 y 4 en el modelo 7 (figura 5.11). Sin embargo esto carece de sentido puesto que la ecuación final sería muy difícil de calibrar con datos reales debido a su gran número de parámetros.

- Sin recurrir a este extremo es posible lograr una unificación de muchos de los modelos, de modo que con un número suficientemente pequeño de parámetros es posible formular una ecuación que recoja como casos particulares un gran número de ellos. Por ejemplo, el modelo 1 (figura 5.9) con tan sólo 4 parámetros (más la constante de integración) es capaz de unificar 6 ecuaciones: NUI, Jeuland, Bass, Floyd, NSRL y logística. Añadiendo más parámetros es posible lograr unificar un mayor número de modelos, aunque el «rendimiento» (ratio ecuaciones entre parámetros) es cada vez menor. De este modo el modelo 6 (figura 5.11) con 7 parámetros recoge como casos particulares todos los anteriores más el de Ploheimo y Dickie y el de Bass con deserciones (para incorporar 2 nuevas ecuaciones ha sido preciso introducir 3 nuevos parámetros).

- Debido a este problema, la unificación de ecuaciones se ha detenido en el modelo 7, que cuenta con 9 parámetros. Lógicamente una ecuación de este tipo carece ya de sentido desde el punto de vista práctico.

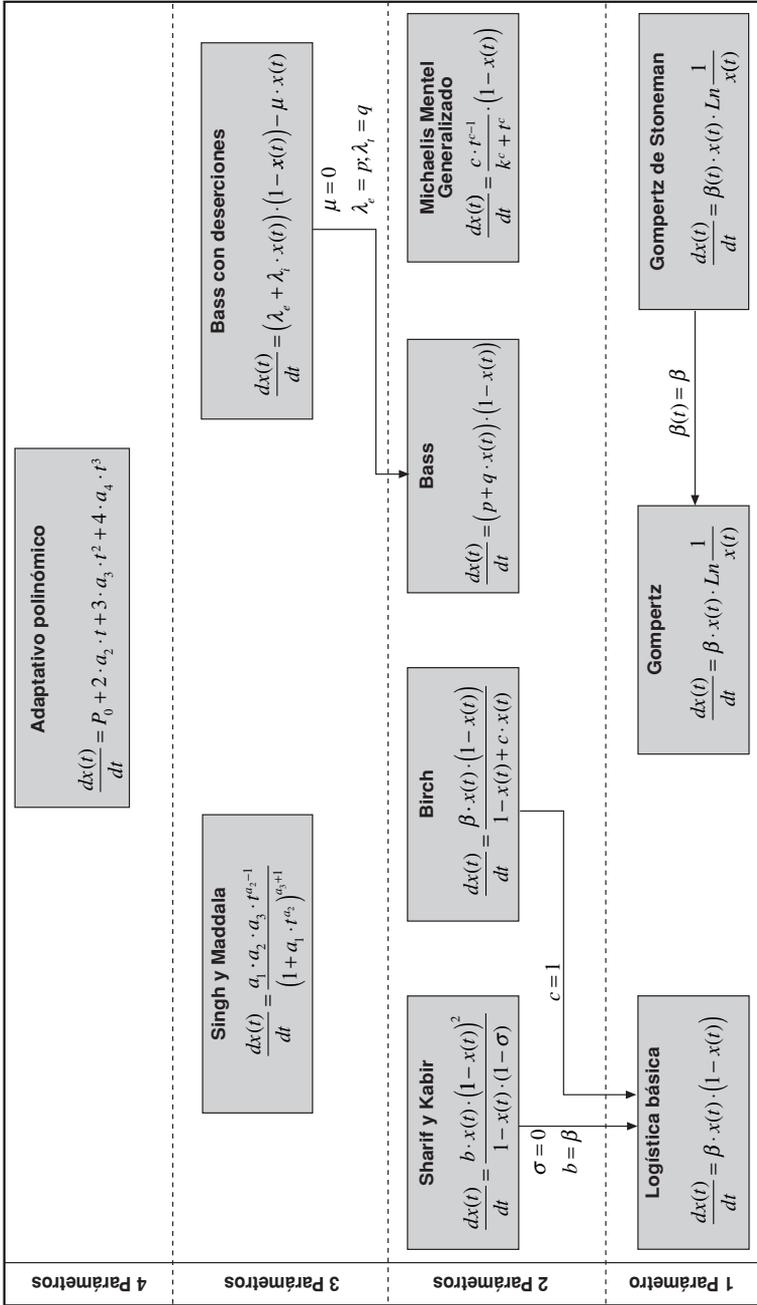
En resumen, las similitudes que existen entre algunos de los modelos estudiados permite formular una serie de modelos generales que sintetizan varios de ellos, aunque no es posible lograr una unificación completa sin recurrir a una ecuación con elevado número de parámetros que, por tanto, no tiene ningún interés desde el punto de vista práctico.

FIGURA 5.7
RELACIONES ENTRE LOS MODELOS ESTUDIADOS (I)



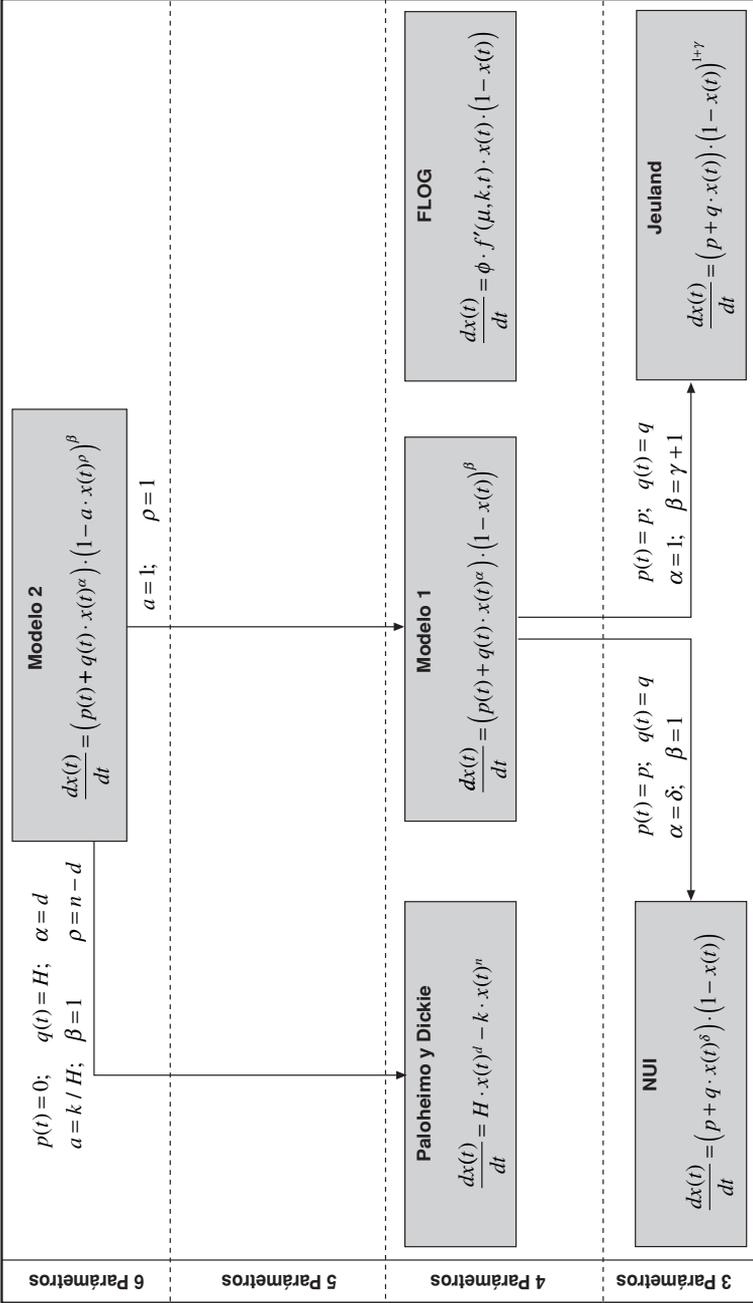
Fuente: Elaboración propia

FIGURA 5.8
RELACIONES ENTRE LOS MODELOS ESTUDIADOS (II)



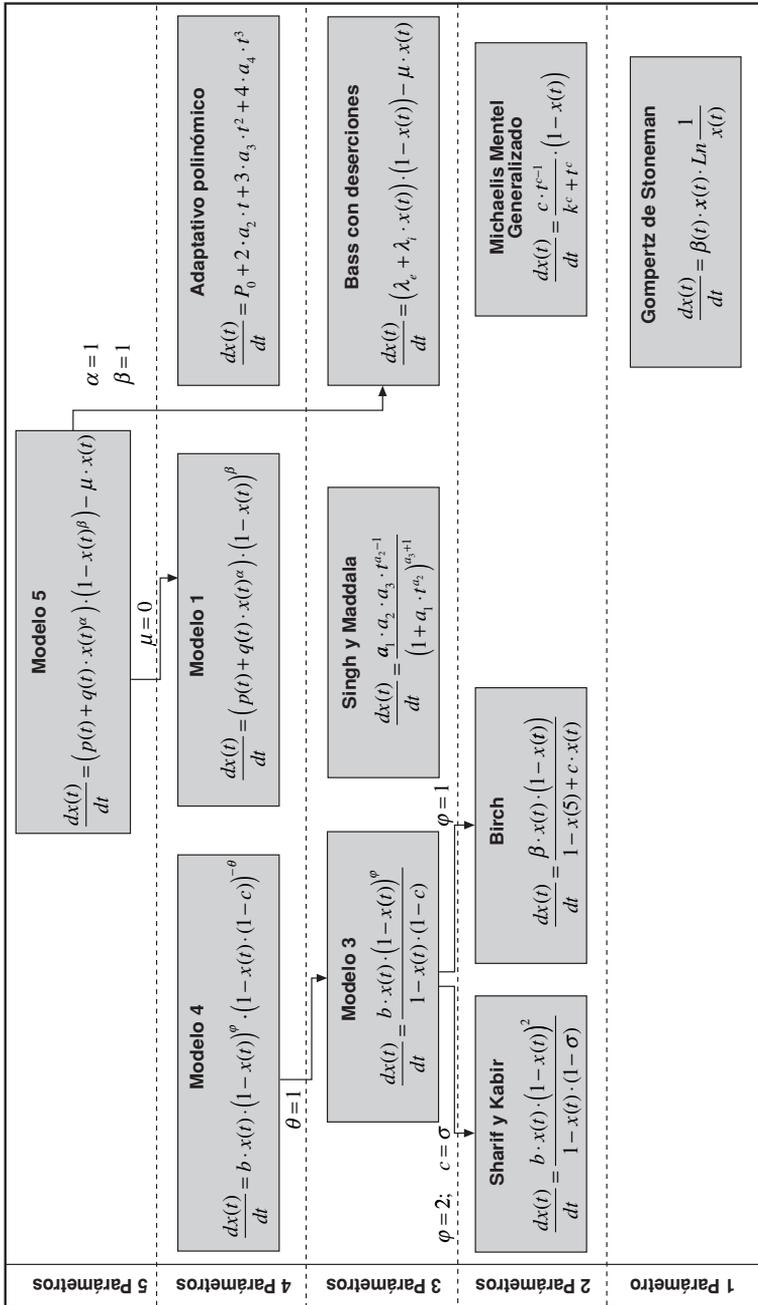
Fuente: Elaboración propia

FIGURA 5.9
UNIFICACIÓN DE LOS MODELOS ESTUDIADOS (I)



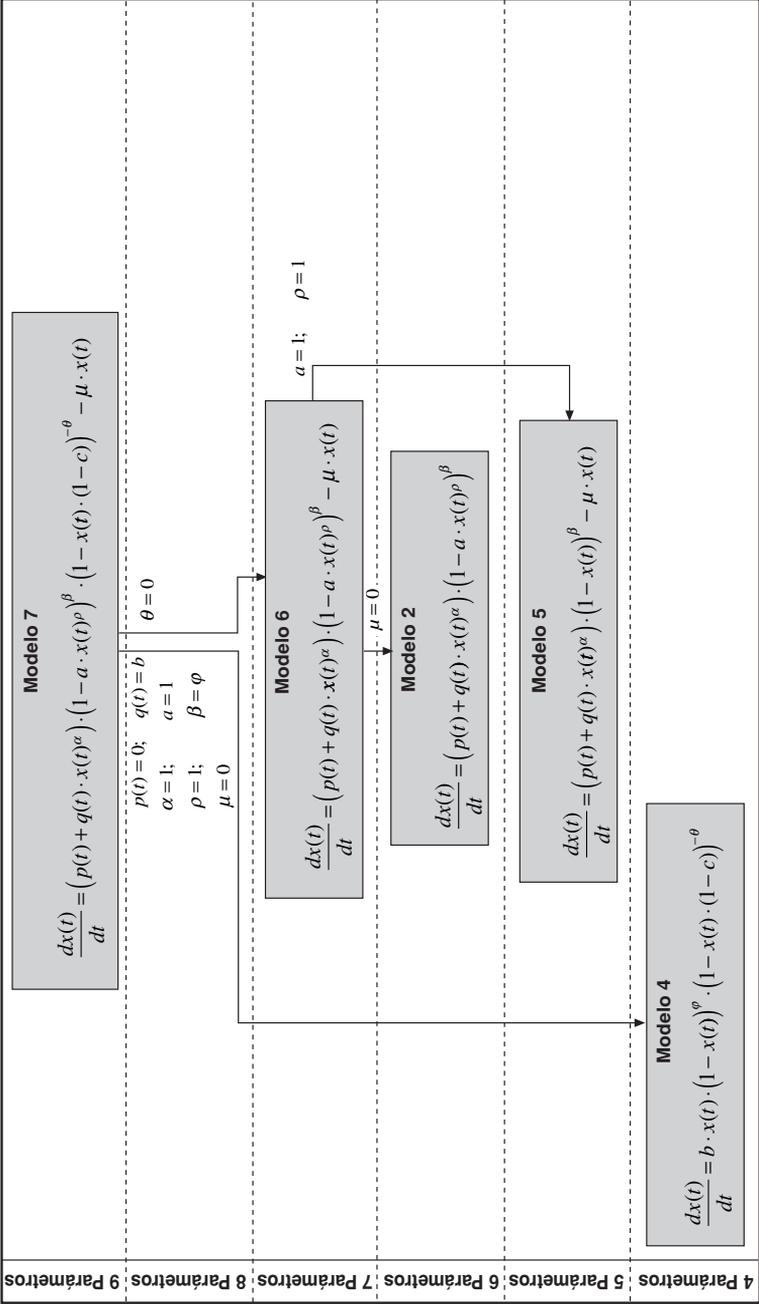
Fuente: Elaboración propia

FIGURA 5.10
UNIFICACIÓN DE LOS MODELOS ESTUDIADOS (II)



Fuente: Elaboración propia

FIGURA 5.11
UNIFICACIÓN DE LOS MODELOS ESTUDIADOS (III)



Fuente: Elaboración propia

5. EXTENSIONES DE LOS MODELOS DE DIFUSIÓN

Como ya se ha mencionado, resulta relativamente sencillo extender algunos de los modelos de difusión estudiados a esquemas de competencia. El modelo logístico, por ejemplo, puede ser generalizado a dos dimensiones a fin de contemplar los efectos de competencia entre distintos estándares tecnológicos, denominándose en este caso modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra.

ECUACIÓN LOGÍSTICA C. INTERESPECÍFICA LOTKA-VOLTERRA

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \beta_{11} \cdot x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - \beta_{12} \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \beta_{22} \cdot x_2(t) \cdot (1 - x_2(t)) - \beta_{21} \cdot x_2(t) \cdot x_1(t) \end{cases}$$

De hecho la generalización a n dimensiones es trivial en este caso, tal y como se indica en el siguiente sistema de ecuaciones (modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra n -dimensional):

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \beta_{ii} \cdot x_i(t) \cdot (1 - x_i(t)) - \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \cdot x_i(t) \cdot x_j(t)$$

$\forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

En el siguiente capítulo se estudiarán en detalle las características de este y otros modelos, siendo en muchos casos generalizaciones de los modelos de difusión que ya han sido analizados.

6. CONCLUSIONES

Nuevamente hay tres ideas que merecen ser destacadas de este capítulo:

- La difusión de innovaciones puede definirse como la diseminación de una nueva idea desde su fuente de creación hasta los usuarios finales.
- Es frecuente asumir que la distribución no acumulada de frecuencias correspondiente a un proceso de difusión que siga una evolución temporal de tipo sigmoideal es aproximadamente normal, siendo posible distinguir entre cinco grupos de usuarios en función de su propensión a adquirir el producto: innovadores, primeros adoptantes, mayoría precoz, mayoría tardía y rezagados. No obstante también se han desarrollado otras distribuciones para la clasificación de adoptantes.
- Existe una cantidad ingente de modelos de difusión compatibles con la evolución de un producto de red, aunque muchos de ellos están relacionados (o en terminos técnicos, se trata de *nested models*).