

CAPÍTULO VI

MODELOS MULTIDIMENSIONALES (COMPETENCIA)

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es revisar aquellos modelos de dimensión mayor que uno y basados en la Teoría de Sistemas Dinámicos que incorporen algún elemento relevante para el estudio de los mercados de redes. Si en el capítulo anterior se han estudiado distintos modelos de difusión tecnológica (unidimensionales), en éste se pretende introducir modelos más complejos que consideran efectos interactivos de distinto tipo (multidimensionales), y que en muchos casos pueden verse como generalizaciones de los distintos modelos de difusión estudiados en el capítulo anterior. La mayoría de los sistemas que se estudian, pese a haber sido empleados también en la literatura económica, surgen en el contexto de la biología teórica, aunque su interpretación se hará en términos de Externalidades de Red.

1. INTRODUCCIÓN

Casi todos los elementos requeridos para la elaboración de un modelo de competencia entre estándares tecnológicos sujetos a Efectos de Red ya han sido expuestos. Para completar el análisis sólo es preciso estudiar las características propias de sistemas multidimensionales, en los que se consideren de forma simultánea dos o más variables y las interacciones entre ellas.

Como se estudió en el capítulo III, uno de los factores clave para el éxito de una tecnología en presencia de Efectos de Red es el mercado

de complementarios. Matemáticamente esta relación entre, por ejemplo, un proveedor de hardware y uno de software complementario puede representarse (al menos en una primera aproximación) mediante un sistema dinámico de 2 ecuaciones. Se estaría hablando en este caso de modelos de **simbiosis** o **mutualismo**. Si se considera la competencia entre dos tecnologías rivales como el sistema operativo *Windows* de Microsoft y *Solaris* de Sun, los modelos deberán constar también en este caso de un mínimo de dos ecuaciones diferenciales, y se hablaría de modelos de competencia, o como lo denominan los biólogos, **competencia interespecífica**. En cualquiera de los casos anteriores, puesto que el número de usuarios de una determinada tecnología es necesariamente finito, las ecuaciones deben incluir ciertos términos que limiten el número máximo de adoptantes, términos que la literatura sobre biología teórica suele identificar con procesos de **competencia intraespecífica**. También se comentó en el capítulo II la importancia de la generación de expectativas de éxito en el proceso de adopción tecnológica, y en determinados casos la comunicación boca-a-oido puede ser un mecanismo sumamente efectivo: Google apenas invirtió en publicidad y sin embargo logró hacerse con el dominio del mercado de buscadores de Internet a través de este sistema. Por tanto puede ser interesante incorporar al modelo de competencia tecnológica ciertas características de los modelos de **infección parasitaria**, que como se verá pueden emplearse para expresar en términos matemáticos este tipo de fenómenos.

En resumen, las distintas interacciones entre estándares tecnológicos pueden vincularse a modelos biológicos como se indica en la figura 6.1.

FIGURA 6.1
DIFERENTES TIPOS DE RELACIÓN
ENTRE ESTÁNDARES TECNOLÓGICOS

		Efecto de la Tecnología 1 en la Tecnología 2	
		POSITIVA	NEGATIVA
Efecto de la Tecnología 1 en la Tecnología 2	POSITIVA	Simbiosis	Depredación o Parasitismo
	NEGATIVA	Depredación o Parasitismo	Competencia

Fuente: Adaptado de PRISTORIUS y UTTERBACK (1997).

De hecho, numerosos autores han estudiado la aplicación de este tipo de modelos biológicos a diferentes problemas económicos y organizativos, como por ejemplo CASTIAUX (2004); SPROTT (2004); HIVNER *et al.*, (2003); MORRIS y PRATT (2003); WATANABE *et al.*, (2003); CHEN (2002); ANDERSEN (2002); LÓPEZ y SANJUAN (2001); THOMAS *et al.*, (2001); ZANGWILL y KANTOR (2000); MODIS (1997); PRISTORIUS y UTTERBACK (1997); BAUM y KORN (1996), REGGIANI y NIJKAMP (1994: 94-108) y muchos otros que se irán mencionando a lo largo del presente capítulo. Y es que, como señalan distintos investigadores (por ejemplo THOMAS *et al.*, 2001; BHARGAVA y MUKHERJEE, 1994: 54; Marcheti, 1983), este tipo de modelos presenta un enorme potencial para representar determinados fenómenos económicos y sociales.

Realmente muchos de los conceptos que se han estudiado hasta el momento pueden ser modelizados de forma relativamente sencilla mediante la Teoría de Sistemas Dinámicos, debido a que los mecanismos subyacentes son idénticos a los que se encuentran en muchos otros sistemas, como por ejemplo los biológicos o químicos. Por ejemplo las Ecuaciones de Lotka-Volterra de competencia interespecífica expresan únicamente un mecanismo de competencia: desde el punto de vista matemático carece de importancia que se trate de competencia entre especies animales o entre estándares rivales.

Por último indicar que en el ámbito de la biología teórica se han desarrollado una cantidad ingente de modelos relacionados con cada uno de los procesos básicos que pueden tener interés para el estudio de los mercados de redes, de modo que no se pretende en este capítulo realizar una revisión exhaustiva de cada uno de ellos. Simplemente se mostrarán en cada caso los modelos más representativos, a fin de identificar aquellos elementos que caracterizan el proceso. Aunque se analizará también otro tipo de modelos, el estudio se centrará en sistemas de ecuaciones del tipo de Kolmogorov, es decir, aquellos que pueden ser expresados del siguiente modo (BRAUER y CASTILLO-CHÁVEZ, 2001: 271):

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot g(x, y)$$

Comprendiendo la naturaleza de las Externalidades de Red (capítulos II y III) y conociendo las reglas matemáticas que permiten modelizar cada uno de sus elementos (capítulos IV, V y VI), es posible plantear modelos específicos para representar el funcionamiento de los mercados de redes.

2. MODELOS DE PREDADOR-PRESA

Aunque existen diferentes propuestas teóricas, este apartado se centrará en los modelos de tipo Lotka-Volterra, que son los empleados más habitualmente y presentan unas propiedades muy interesantes.

A) Modelo Lotka-Volterra depredador-presa sin competencia intraespecífica

Probablemente el modelo depredador-presa más simple que puede plantearse es el de Lotka-Volterra (sin competencia intraespecífica). Este modelo, propuesto por LOTKA (1925) y VOLTERRA (1931) asume que el número de presas crece sin límite en ausencia de depredadores. De este modo el caso más simple con un único tipo de depredador, $y(t)$, y un único tipo de presa, $x(t)$, queda formulado del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \cdot (a - b \cdot y) \\ \frac{dy}{dt} &= y \cdot (c \cdot x - d) \\ a, b, c, d &> 0\end{aligned}$$

Como señala HUTCHINSON (1978: 221), este sistema posee solución analítica exacta, que queda expresada como:

$$\left[\frac{c \cdot x}{d \cdot \exp(c \cdot x/d)} \right]^d \cdot \left[\frac{b \cdot y}{a \cdot \exp(b \cdot y/a)} \right]^a = K$$

siendo K la constante de integración. Aunque en la figura 6.2 se muestra una solución de tipo ciclo límite, este sistema permite otro tipo de soluciones en función del valor de sus parámetros, como las oscilaciones amortiguadas hasta alcanzar un punto fijo o las oscilaciones explosivas (SWART, 1990).

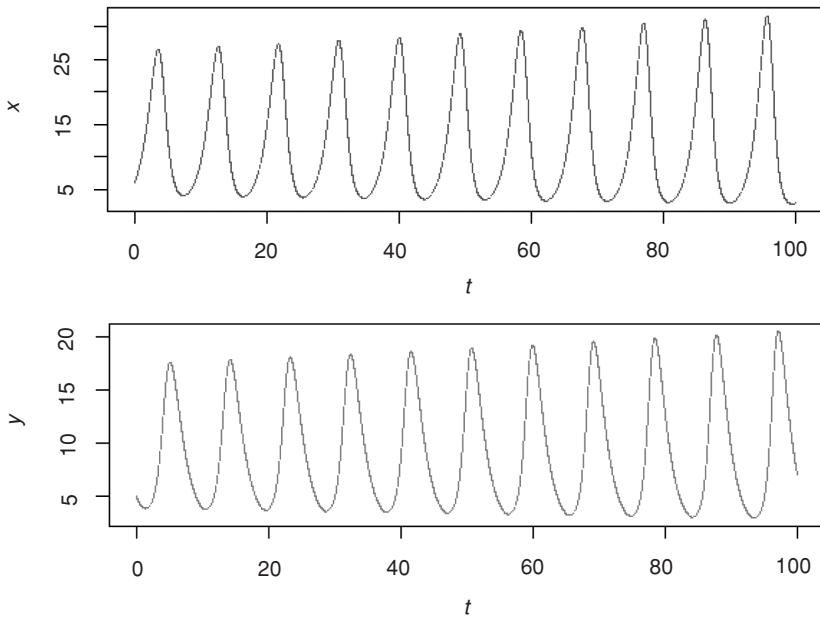
Es necesario indicar que tanto este modelo, como todos los demás de tipo Lotka-Volterra que se estudiarán a continuación (depredador-presa con competencia intraespecífica, competencia interespecífica y simbiosis), son en realidad casos particulares del modelo general de Lotka-Volterra, que puede formularse del siguiente modo (DAVIS, 1962: 109):

$$\frac{dx}{dt} = F + C \cdot x + D \cdot y + G \cdot x^2 + H \cdot x \cdot y + K \cdot y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = E + A \cdot x + B \cdot y + L \cdot x^2 + M \cdot x \cdot y + N \cdot y^2$$

FIGURA 6.2

COMPORTAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE LOTKA-VOLTERRA DEPREDADOR-PRESA SIN COMPETENCIA INTRAESPECÍFICA (a = 0.9, b = 0.1, c = 0.05, d = 0.6)



Fuente: Elaboración Propia (algoritmo programado en «R»).

Volviendo al modelo de Lotka-Volterra depredador-presa sin competencia intraespecífica, es sencillo plantear su generalización a esquemas de dimensión superior, de modo que puede formularse un modelo con k depredadores y l presas, en el que todos los depredadores interactúan con todas las presas aunque con distinto grado de severidad. En este caso el sistema de ecuaciones, de dimensión $k + l$, quedaría expresado del siguiente modo:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \cdot \left(a_i - \sum_{j=1}^k b_{ij} \cdot y_j \right)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^l c_{ij} \cdot x_j - d_i \right)$$

El interés de este modelo está en la forma de introducir el proceso de depredación. Como puede verse, este efecto se introduce en la ecuación

de las presas mediante un término que viene dado por: $-x_i \cdot \sum_{j=1}^k b_{ij} \cdot y_j$.

Por tanto, para el caso de competencia tecnológica que estamos estudiando, podemos tomar este tipo de formulación como una primera aproximación a los efectos negativos que provoca en un estándar el crecimiento de la cuota de mercado de otros estándares rivales e incompatibles.

Sin embargo ésta no es la única generalización posible, y por ejemplo en 1998, SAMARDZIJA y GRELLER propusieron un sistema con dos depredadores y una presa ligeramente distinto, y que además presenta un comportamiento caótico bajo condiciones menos estrictas que el modelo original (COSTELLO, 1999).

Como curiosidad merece la pena mencionar que estas ecuaciones, que fueron formuladas originalmente para describir la interacción entre poblaciones de depredadores y presas, aparecen en el ámbito de la química y se emplean para representar determinados procesos autocatalíticos (MURRAY, 2002: 203). Del mismo modo, BRANDER y TAYLOR (1998), desarrollaron un interesante modelo económico relacionado con estas ecuaciones. Y como señalan STAUFFER y SCHULZE (2005) modelos similares se han empleado para estudiar la evolución de los lenguajes. Una vez más queda de manifiesto el carácter general de los sistemas dinámicos.

B) Modelo Lotka-Volterra depredador-presa con competencia intraespecífica

El sistema depredador-presa de Lotka-Volterra con competencia intraespecífica trata de solucionar el problema del crecimiento incontrolado de presas en ausencia de depredadores, de modo que añade un término que limita este crecimiento. Del mismo modo se limita también el crecimiento de depredadores añadiendo a la ecuación correspondiente un factor adicional. La formulación para el caso bidimensional es la siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \cdot (a - \lambda \cdot x - b \cdot y) \\ \frac{dy}{dt} &= y \cdot (-c + d \cdot x - \mu \cdot y)\end{aligned}$$

Puede verse que el mecanismo que limita el crecimiento de presas y depredadores viene dado por los términos $-\lambda \cdot x$ y $-\mu \cdot y$ respectivamente. Estos términos inducen una realimentación negativa que frena el crecimiento a medida que las poblaciones se aproximan a su tamaño máximo.

C) Modelos depredador-presa avanzados

Como ya se ha indicado, en el modelo de Lotka-Volterra clásico los efectos de la depredación se introducen mediante un término lineal. Sin embargo es posible plantear modelos más complejos, y de hecho se han formulado una gran variedad de modelos alternativos. MURRAY (2002: 86-88) identifica distintas posibilidades partiendo del siguiente esquema:

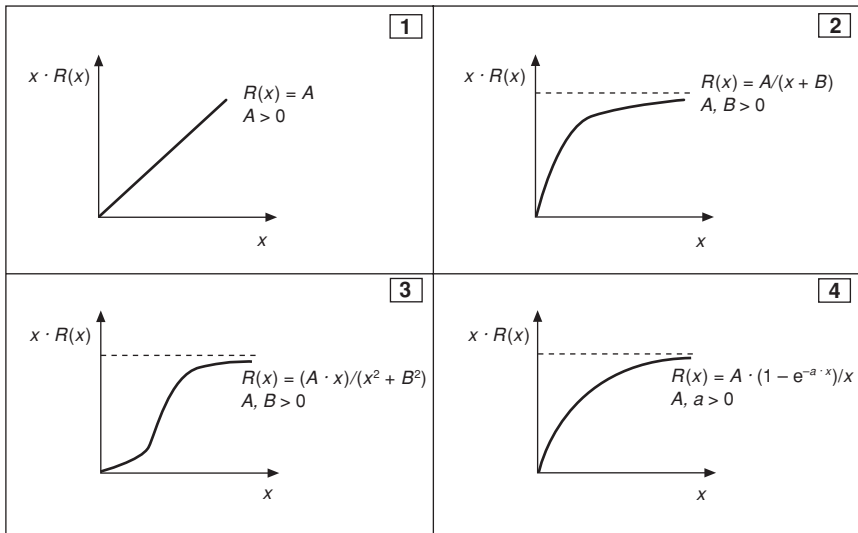
$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (a - \lambda \cdot x) - x \cdot y \cdot R(x)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot G(x, y)$$

$R(x)$ es en este caso una función que refleja la respuesta del depredador a cambios en la densidad del número de presas. La figura 6.3 muestra cuatro formulaciones alternativas de $R(x)$, y como puede comprobarse fácilmente, la primera de ellas corresponde precisamente al modelo de Lotka-Volterra con competencia intraespecífica. La función $G(x)$ también tiene distintas formulaciones ¹.

FIGURA 6.3

FORMULACIONES ALTERNATIVAS PARA LA RESPUESTA DE LOS DEPREDADORES A CAMBIOS EN LA DENSIDAD DE PRESAS



Fuente: Adaptado de MURRAY (2002: 87).

¹ Por ejemplo (PIANKA, 1982: 193) propone una función en la que el efecto amortiguador para el depredador incluye la densidad de la presa, de modo que $G(x, y) = \alpha \cdot x - \beta \cdot y/x$.

3. MODELOS DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA

Puesto que se trata de modelos específicamente formulados para representar la interacción competitiva entre distintas especies, es lógico pensar que gran parte de sus elementos resulten de interés para modelizar esquemas de competencia tecnológica, aunque sea preciso realizar ciertas modificaciones a fin de adaptarlos convenientemente.

A) Modelo Lotka-Volterra de competencia interespecífica

El modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra ha sido profusamente estudiado en el ámbito de la Biología Teórica (ver por ejemplo MURRAY, 2002: 94-99; ALSTAD, 2001: 71-90; CASE, 2000: 319-326; KEDDY, 2001: 336-346). Al margen de sus aplicaciones al campo de la Biología Matemática, los modelos tipo Lotka-Volterra han sido también empleados en el ámbito de la Economía para estudiar temas tan diversos como los mercados financieros (SPROTT, 2004) o la competencia entre portales de Internet (LÓPEZ *et al.*, 2003; LÓPEZ y SANJUAN, 2001). Del mismo modo, en el ámbito de la Dirección de empresas también ha sido utilizado aunque, salvo algunas excepciones (ver por ejemplo ANDERSEN, 2002), con un enfoque distinto al que se busca en este libro, ya que eran aplicadas a poblaciones de empresas, no a empresas individuales (NÚÑEZ NICKEL y MOYANO FUENTES, 2002). Este modelo puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot (1 - x_i) - x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$a_{ij} > 0$$

o análogamente²:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot \left(1 - x_i - \sum_{j \neq i} a'_{ij} \cdot x_j \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

donde r_i es la tasa de crecimiento del estándar i -ésimo y a_{ij} el coeficiente de interacción competitiva. Esta interacción no tiene por qué ser simétrica, de modo que los coeficientes pueden ser distintos. Obviamente este modelo asume que no existen interacciones competitivas de orden superior (entre más de 2 especies), lo que simplifica el tratamiento mate-

² Como puede comprobarse la relación entre los coeficientes a_{ij} y a'_{ij} es la siguiente: $a_{ij} = a'_{ij} \cdot r_i$.

mático y empírico. Otra hipótesis implícita es que las tasas de crecimiento e interacciones competitivas permanecen constantes a lo largo del tiempo, lo que en la práctica no resulta demasiado realista, como tampoco lo es el no considerar retardos temporales (PIANKA, 1982: 172).

Otro problema, que comparte con la generalización del modelo de Bass, es el indicado por KRISHNAN *et al.*, (2000): el mercado potencial restante para un determinado producto debe considerar también el número de usuarios de otras tecnologías rivales, por lo que una aproximación más realista vendría dada por la siguiente expresión:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot \left[1 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - \left(\sum_{j \neq i} a'_{ij} \cdot x_j \right) \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

A fin de comprender los mecanismos básicos del modelo ³, merece la pena analizar el comportamiento del caso más sencillo posible: la competencia entre dos tecnologías. En este caso el sistema de ecuaciones queda reducido a la siguiente expresión:

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1 - a'_{12} \cdot x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_2 - a'_{21} \cdot x_1)$$

En este caso particular se identifican 4 escenarios posibles:

1. **Escenario 1.** Competencia igualada en presencia de débiles Efectos de Red ($a'_{12} < 1$ y $a'_{21} < 1$).

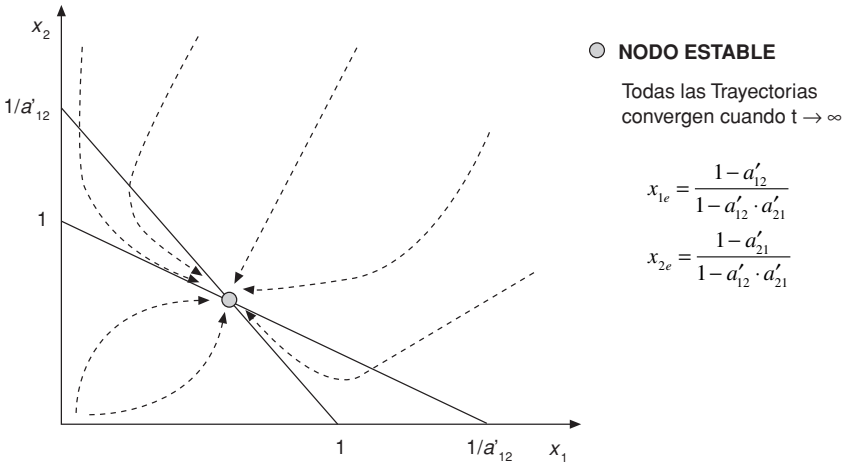
En este caso la competencia no es excesiva, es decir, el efecto inhibitor del estándar rival es menor que el efecto del propio crecimiento. Por tanto es posible una coexistencia a largo plazo, como se aprecia en la figura 6.4. El punto de equilibrio o nodo estable indica las cuotas de mercado a que convergen ambos estándares. Cuanto mayor sea el efecto inhibitor de la tecnología x_2 sobre la x_1 (mayor coeficiente a'_{12}), menor será la cuota de mercado final de x_1 y viceversa, es decir, el equilibrio final dependerá del efecto de la interacción entre ambas tecnologías. La definición adoptada hace que las cuotas de mercado en el equilibrio final no sumen uno en el caso general (CHEN, 2002), ya que es posible que haya clientes que utilicen de forma simultánea las dos tecnologías.

Se pueden identificar este tipo de comportamientos con estrategias de transición (ver capítulo III), en las que el nuevo estándar sigue

³ Se estudiará el modelo original de Lotka-Volterra.

siendo compatible con el existente, por lo que es posible una coexistencia de ambos, aunque a largo plazo el punto de equilibrio se desplace hacia cuotas de mercado cada vez más diferentes. También puede darse en casos en los que haya grupos de usuarios con percepciones muy diferentes sobre las expectativas y valor de cada uno de los estándares rivales.

FIGURA 6.4
 MODELO LOTKA-VOLTERRA
 DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA: ESCENARIO 1

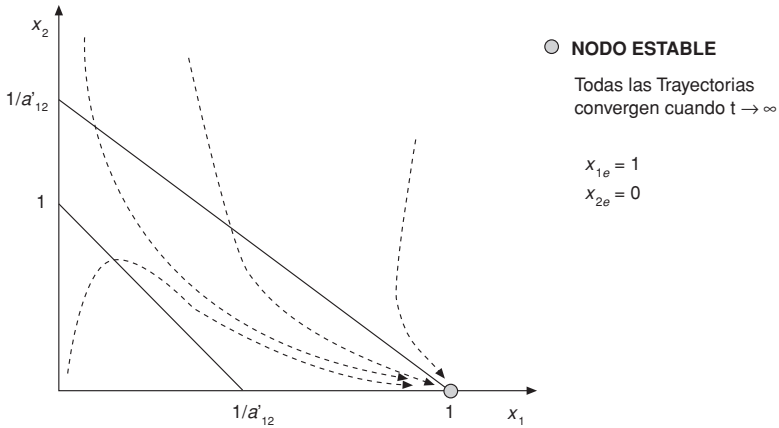


Fuente: ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004).

2. **Escenario 2.** Competencia no igualada a favor de x_1 ($a'_{12} < 1$ y $a'_{21} > 1$).

En este caso la superioridad del estándar x_1 hace que, con independencia de las cuotas de mercado iniciales, termine haciéndose con la totalidad del mercado, eliminando por completo al estándar x_2 . Es posible identificar este caso con la aplicación de estrategias de discontinuidad (capítulo III) en las que el triunfo de una tecnología, debido a su incompatibilidad, da lugar a la desaparición de la otra. Este modelo podría representar adecuadamente la situación actual entre los vídeos VHS y los DVDs: pese a que la cuota inicial de mercado de VHS es muy superior a la de los DVDs, sus mayores prestaciones y expectativas de éxito han iniciado una evolución del mercado que concluirá con la desaparición a largo plazo de los vídeos convencionales (figura 6.5).

FIGURA 6.5
 MODELO LOTKA-VOLTERRA DE
 COMPETENCIA INTERESPECÍFICA: ESCENARIO 2

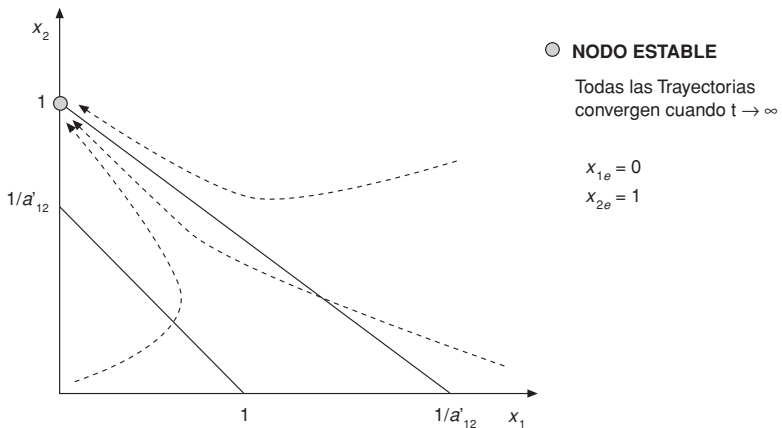


Fuente: ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004).

3. **Escenario 3.** Competencia no igualada a favor de x_2 ($a'_{12} > 1$ y $a'_{21} < 1$).

Es el caso simétrico al anterior, de modo que el estándar x_2 acabará desplazando a largo plazo al estándar x_1 (figura 6.6).

FIGURA 6.6
 MODELO LOTKA-VOLTERRA
 DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA: ESCENARIO 3



Fuente: ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004).

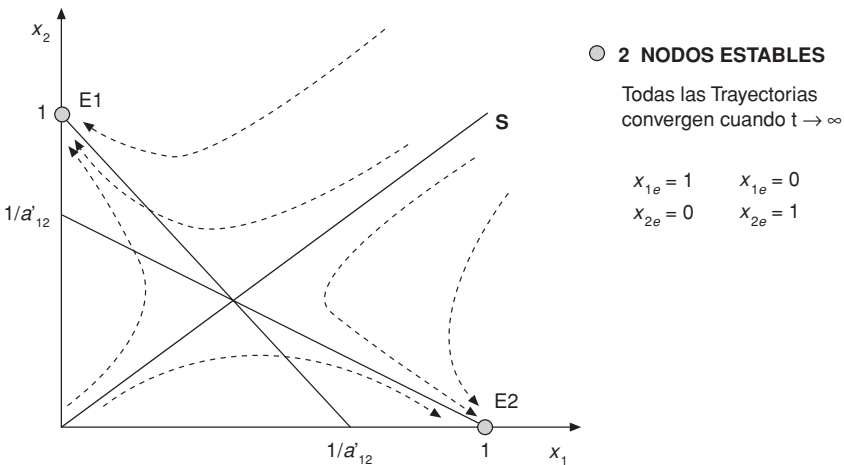
4. **Escenario 4.** Competencia igualada en presencia de fuertes Efectos de Red ($a'_{12} > 1$ y $a'_{21} > 1$).

Quizá sea el caso más interesante en cuanto a la representación de fenómenos reales ya que el equilibrio final depende tanto de las características de los estándares como de la cuota inicial de mercado de cada uno de ellos. Representa situaciones en las que existe un equilibrio, no existiendo una ventaja excesiva de ninguna de las dos tecnologías rivales. En este caso el diagrama de fases queda dividido en dos regiones por la recta S , que une el origen con el punto de intersección de las rectas $1 - x_1 - a'_{12} \cdot x_2 = 0$ y $1 - x_2 - a'_{21} \cdot x_1 = 0$ (figura 6.7).

Tenemos dos puntos de equilibrio diferentes: uno en el que el estándar x_1 obtiene la totalidad del mercado y otro en el que sucede lo contrario. El factor determinante en este caso es la base instalada de clientes (cuota de mercado inicial) de cada uno de ellos. Si el punto que representa la cuota inicial se encuentra por encima de la línea S , la tecnología x_2 resultará vencedora, y si se encuentra por debajo ocurrirá lo contrario. Por tanto la recta S representa la frontera límite que separa la masa crítica relativa de usuarios, y una vez superada en uno u otro sentido, el proceso de eliminación de uno de los dos estándares es irreversible. La mayor o menor pendiente de S viene determinada por las características de cada una de las tecnologías.

FIGURA 6.7

MODELO LOTKA-VOLTERRA
DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA: ESCENARIO 4

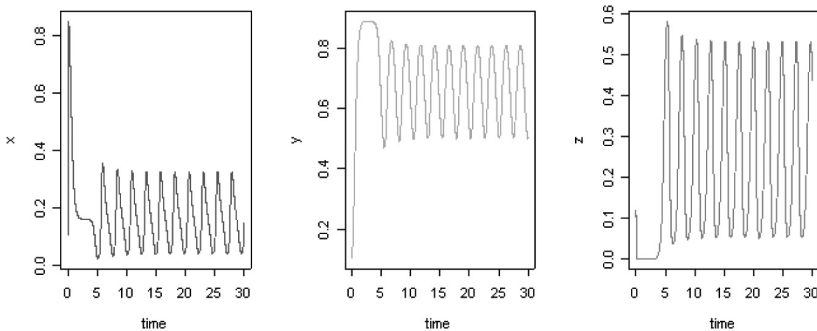


Fuente: ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004).

El caso analizado (competencia entre 2 estándares) es el más sencillo posible. Sin embargo es viable analizar escenarios de mayor dimensión, en los que lógicamente el comportamiento puede ser mucho más complejo. En este sentido es preciso indicar que para dimensión 3 pueden aparecer comportamientos cíclicos, como se muestra en la figura 6.8 (tecnologías x, y, z).

FIGURA 6.8
 COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA LOTKA-VOLTERRA
 DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA PARA CIERTA
 COMBINACIÓN DE PARÁMETROS Y 3 TECNOLOGÍAS

$$a'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 18/19 & 16/19 \\ 19/27 & 1 & 8/9 \\ 19/12 & 9/12 & 1 \end{pmatrix}; \quad r_i = \begin{pmatrix} 361 \\ 27/2 \\ 48 \end{pmatrix}$$



Fuente: Elaboración Propia (algoritmo programado en «R»).

Como señala CASTIAUX (2004), estas ecuaciones (tanto en su versión competitiva como simbiótica) están adquiriendo un creciente interés entre la comunidad académica para representar fenómenos de sustitución tecnológica, el cambio organizativo o el aprendizaje organizativo. En este sentido merece la pena destacar que modelos con una filosofía similar también han sido empleados para representar el impacto del software pirata en las ventas legales del producto (GIVON *et al.*, 1995).

Por último indicar que, como ya se mencionó anteriormente, es frecuente que los modelos de competencia sean generalizaciones de los modelos de difusión, y en el caso del modelo de Lotka-Volterra que acaba de analizarse, es inmediato comprobar que se trata de una generalización del modelo de difusión logística. En este sentido, otros modelos de difusión pueden ser generalizados de forma análoga, como ocurre en el caso que se estudiará a continuación.

B) Modelo de Mahajan y Peterson

Este modelo fue propuesto por MAHAJAN y PETERSON (1978b) como una generalización del modelo de difusión de Bass. Su formulación es la siguiente:

$$\frac{dx_i}{dt} = (1 - x_i) \cdot \left(a_i + b_i \cdot x_i + \sum_{j \neq i} c_{ij} \cdot x_j \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

En este caso la interpretación de los coeficientes es similar a la del modelo de Bass: a_i serían los coeficientes de innovación, b_i los coeficientes de imitación y c_{ij} los coeficientes de competencia o complementariedad. Es preciso destacar que este modelo puede ser interpretado también en términos de cooperación sin más que cambiar el signo de los coeficientes c_{ij} : si son positivos se trata de un modelo de cooperación y si son negativos de un modelo de competencia.

Un problema de este modelo, que comparte con el de Lotka-Volterra, es que (en el caso de competencia) el incremento de usuarios de una tecnología frena el crecimiento de las otras a través de los coeficientes c_{ij} , pero las tecnologías no se roban clientes entre sí. Esto se debe al término $1 - x_i$, que recoge la realimentación negativa de la propia tecnología (competencia intraespecífica): el número de clientes potenciales que quedan por adquirir la tecnología sólo depende de la diferencia entre la cuota máxima (que es igual a 1) y la cuota actual (x_i), de modo que no se ve afectado por las cuotas del resto de tecnologías. Por este motivo han surgido modelos más realistas como el que se detalla a continuación.

C) Modelo de Altinkemer *et al.*

Este modelo, propuesto por ALTINKEMER *et al.*, (2003) trata de introducir el efecto del robo de clientes entre tecnologías. Esto hace que la suma de las cuotas de mercado en tanto por uno de todas las tecnologías sea exactamente 1, lo que no ocurría con los modelos precedentes (que contemplaban la posibilidad de que varios usuarios adquiriesen varias de las tecnologías en competencia).

Puesto que el modelo original fue formulado en número de adoptantes y no en cuota de mercado en tanto por uno, se ha optado por mantener este criterio. Para formular el modelo en tanto por uno bastaría con dividir el resultado por el mercado total en cada instante. A continua-

ción se muestra la formulación del modelo para el caso general de competencia entre N estándares tecnológicos.

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(M(t) - \sum_{j=1}^N x_j \right) \cdot \left(a_i + \frac{b_i}{M(t)} \cdot x_i - \sum_{j \neq i} \frac{c_{ij}}{M(t)} \cdot x_j \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Este modelo permite además que el número total de potenciales adoptantes, $M(t)$, varíe con el tiempo. Estos autores proponen de hecho dos alternativas diferentes:

$$M(t) = m_0 + \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i(t)}{\bar{M}} \right)^{-1/k} \cdot (\bar{M} - m_0) \quad 0 < k < 1$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = f(m_0) \quad M(t) \leq \bar{M}$$

\bar{M} representa el máximo número de adoptantes, m_0 el máximo número de adoptantes inicial y k es el factor de crecimiento de la base de potenciales adoptantes. La primera ecuación asume que el número de potenciales adoptantes se incrementa con el número de usuarios, introduciendo de esta manera el efecto de las Externalidades de Red.

Este modelo sin embargo también presenta una serie de debilidades, y probablemente la más grave es que se asume que los usuarios no abandonan una tecnología una vez que la han adquirido.

4. MODELOS DE MUTUALISMO

El término mutualismo hace referencia a una relación interespecífica en la que las dos especies implicadas se ven beneficiadas. Al margen de la distinción entre simbiosis y comensalismo que se emplea en la literatura relacionada con la biología teórica, en este libro se emplearán las definiciones habituales en el ámbito de la ecología de organizaciones (ver por ejemplo BARNETT y CARROLL, 1987). De este modo la **simbiosis** estaría basada en la interdependencia positiva derivada de diferencias complementarias (p.e. las relaciones de un productor con sus proveedores y distribuidores) y el **comensalismo** sería una interdependencia positiva que surge como consecuencia de semejanzas suplementarias (p.e. organizaciones similares que trabajan conjuntamente en una determinada acción política). De este modo, puesto que el principal interés de los modelos que se analizarán a continuación se centra en represen-

tar la interacción entre productos complementarios, se hablará de relaciones simbióticas.

El mutualismo no ha sido tan estudiado como otro tipo de interacciones (MURRAY, 2002: 99), por lo que se analizarán únicamente dos de los modelos más conocidos.

A) Lotka-Volterra de simbiosis sin competencia intraespecífica

Este modelo es análogo al sistema Lotka-Volterra depredador-presa, pero considerando una interacción positiva entre las diferentes especies, de modo que la expresión general de este tipo de modelos es la siguiente (MURRAY, 2002: 99):

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i + x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$a_{ij} > 0$$

No merece la pena insistir demasiado en las propiedades de este modelo, ya que se trata de un modelo poco realista en tanto que no existe competencia intraespecífica. Por este motivo resulta más razonable plantear un modelo como el que se propone a continuación.

B) Lotka-Volterra de simbiosis con competencia intraespecífica

De forma similar al caso anterior, se trata de un modelo análogo al de competencia interespecífica de Lotka-Volterra pero considerando una interacción positiva entre especies, quedando el modelo expresado del siguiente modo (MURRAY, 2002: 100):

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot \left(1 - x_i + \sum_{j \neq i} a'_{ij} \cdot x_j \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$a_{ij} > 0$$

Este modelo presenta una importante diferencia respecto al modelo original de competencia en el que se basa: debido a la interacción positiva entre las distintas tecnologías es posible un crecimiento incontrolado bajo ciertas circunstancias. Para analizar este efecto se estudiará el caso particular de dos estándares, en el que el modelo queda reducido al siguiente sistema:

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1 + a'_{12} \cdot x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_2 + a'_{21} \cdot x_1)$$

$$a_{12}, a_{21} > 0$$

1. **Escenario 1.** Efecto simbiótico fuerte ($a'_{12} \cdot a'_{21} > 1$).

En este caso se produce un crecimiento ilimitado de las cuotas de mercado de ambos estándares. Este comportamiento resulta poco realista en sistemas reales y por tanto no se trata de un escenario que merezca la pena analizar en detalle.

2. **Escenario 2.** Efecto simbiótico débil ($a'_{12} \cdot a'_{21} < 1$).

Las dos tecnologías tienden a un equilibrio estable determinado por los valores de los parámetros de las ecuaciones. Este equilibrio es independiente de las cuotas de mercado iniciales consideradas, y se verifica que en dicho equilibrio ambas cuotas de mercado son superiores a 1⁴. Desde el punto de vista del efecto de los productos complementarios en presencia de Efectos de Red, este comportamiento podría interpretarse del siguiente modo: siendo x_1 la tecnología considerada y x_2 la tecnología complementaria, el efecto simbiótico entre ambas da lugar a un crecimiento de la cuota de mercado de ambas que hace que el número de productos vendidos exceda al número de usuarios como consecuencia de dicho efecto simbiótico.

C) Otros modelos

KUMAR y KRISHNAN (2002), partiendo del modelo de Bass generalizado, propusieron un modelo de difusión de innovaciones en el que, al introducir un determinado producto en un país, su evolución se veía condicionada por la evolución del mismo en otros países diferentes. El modelo está centrado en la importancia de la inversión en marketing, por lo que no aporta elementos relevantes para la presente investigación, pero constituye un buen ejemplo de que no sólo la ecuación logística puede ser generalizada a esquemas simbióticos de dimensión superior.

⁴ Esto puede interpretarse como el hecho de que algunos usuarios adquieran más de un producto. Por ejemplo, en el caso de los reproductores de DVDs un individuo puede comprar más de un reproductor, con lo que el número de productos vendidos excederá al número de usuarios.

5. MODELOS DE INFECCIÓN

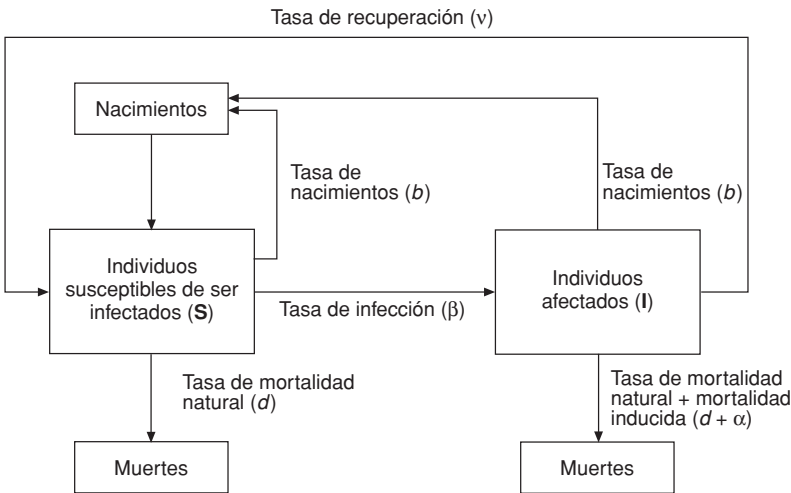
Los modelos de infección permiten ilustrar ciertos mecanismos interesantes para el estudio de los mercados de redes. Por ejemplo Hivner *et al.*, (2003) emplearon un modelo de este tipo para representar el proceso de difusión de ideas innovadoras entre distintas organizaciones.

Ciertamente el proceso de contagio presenta similitudes con el proceso de comunicación boca-a-oido que se produce en la difusión tecnológica. Del mismo modo la recuperación de individuos infectados es equivalente, en términos matemáticos, al abandono de una determinada tecnología. En este sentido merece la pena destacar que, por ejemplo, el modelo SIR que se estudiará a continuación representa la tasa de recuperación de individuos infectados de forma idéntica a la manera en que se expresaba en el modelo de Bass con deserciones la tasa de abandono de la tecnología.

A) El modelo SI con transmisión dependiente de la densidad

Es probablemente uno de los modelos de infección parasitaria más sencillo que puede formularse, y se basa en el mecanismo mostrado en la figura 6.9 (ALSTAD, 2001: 116-122). El proceso queda expresado mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

FIGURA 6.9
ESQUEMA DE UN PROCESO SI
CON TRANSMISIÓN DEPENDIENTE DE LA DENSIDAD



Fuente: ALSTAD (2001: 117).

$$\frac{dS}{dt} = b \cdot (S + I) + v \cdot I - d \cdot S - \beta \cdot S \cdot I$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - (\alpha + d + v) \cdot I$$

El término de transmisión, $\beta \cdot S \cdot I$, incluye la tasa de encuentros entre individuos susceptibles e infectados (dada por el producto $S \cdot I$), así como la probabilidad de transmisión en el encuentro (β). Es inmediato comprobar que el número total de individuos (N) varía según la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = (b - d) \cdot N - \alpha \cdot I$$

B) El modelo SIR

En este caso se introduce una tercera categoría de individuos, asumiendo por tanto que aquellos que se recuperan de la infección no vuelven a contraerla. El mecanismo en este caso es el siguiente: los individuos susceptibles de ser contagiados (S), pueden ser infectados por otros que ya lo están (I), y de forma análoga los individuos infectados pueden recuperarse quedando de este modo inmunizados (R). Esquemáticamente esto queda representado por el proceso $S \rightarrow I \rightarrow R$, siendo $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ el número de individuos susceptibles, infectados y recuperados respectivamente. El modelo queda formulado del siguiente modo (MURRAY, 2002: 320):

$$\frac{dS}{dt} = -r \cdot S \cdot I$$

$$\frac{dI}{dt} = r \cdot S \cdot I - a \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = a \cdot I$$

$$S(0) = S_0 > 0$$

$$I(0) = I_0 > 0$$

$$R(0) = 0$$

Obviamente $S(t) + I(t) + R(t) = N$, siendo N el tamaño total de la población. En este caso r es el ratio de infección y a el ratio de recuperación (siendo ambas constantes positivas). Este último parámetro se interpreta como el inverso del tiempo promedio que dura la infección. Como puede verse el número de infectados en cada ins-

tante de tiempo depende de la interacción entre susceptibles e infectados ($r \cdot S \cdot I$).

Otro aspecto muy interesante de este modelo es que, al igual que ocurre con las Externalidades de Red, hay un umbral mínimo que desencadena la epidemia. Como se detalló en el capítulo III, la difusión de una tecnología sujeta a Efectos de Red sólo era posible si lograba alcanzarse la masa crítica de usuarios que desencadenaba el proceso de adopción masiva. Curiosamente este modelo de infección parasitaria muestra un comportamiento similar: si el número inicial de individuos susceptibles a la infección, S_0 , es superior al ratio a/r , entonces se produce una epidemia (el número de infectados supera en algún momento al número inicial de infectados). Es decir:

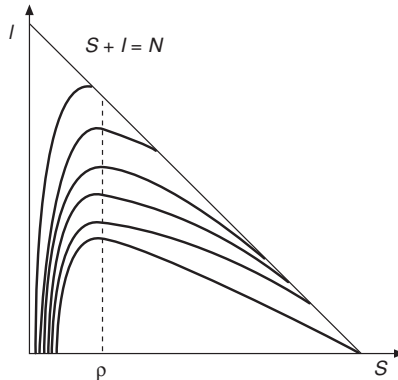
$$\text{Si } S_0 < \frac{a}{r} \Rightarrow I_0 > I(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{No se produce epidemia}$$

$$\text{Si } S_0 > \frac{a}{r} \Rightarrow I(t) > I_0 \text{ Para algún } t \Rightarrow \text{Se produce epidemia}$$

Por tanto el parámetro crítico es el ratio $\rho = a/r$. La figura 6.10 muestra el comportamiento del sistema, y se aprecia que para valores de S_0 superiores a ρ efectivamente se produce una epidemia.

Este tipo de modelos se emplean con frecuencia en el campo de la Econofísica para el estudio de las redes complejas (ver por ejemplo ZHOU *et al.*, 2005; GÓMEZ-GARDEÑAS *et al.*, 2005; MASUDA y CONO, 2005) o para representar fenómenos como la difusión de ideas en una sociedad (BETTENCOURT *et al.*, 2005).

FIGURA 6.10
EVOLUCIÓN DE UN SISTEMA SIR



Fuente: Adaptado de MURRAY (2002: 321).

C) El modelo SIR con transmisión dependiente de la densidad

Es posible mejorar el modelo SIR introduciendo hipótesis más realistas, como por ejemplo una determinada tasa de nacimientos y muertes. En este sentido, el modelo SIR con transmisión dependiente de la densidad es similar al modelo SI pero introduciendo la categoría de individuos recuperados (ver figura 6.11). El sistema de ecuaciones diferenciales que representa el proceso en este caso es el siguiente (ALSTAD, 2002: 126):

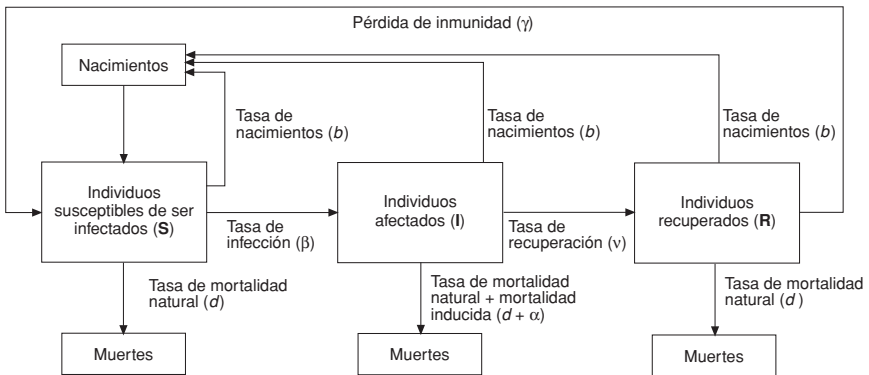
$$\frac{dS}{dt} = b \cdot (S + I + R) - d \cdot S - \beta \cdot S \cdot I + \gamma \cdot R$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - (\alpha + d + \nu) \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = \nu \cdot I - (d + \gamma) \cdot R$$

FIGURA 6.11

PROCESO SIR CON TRANSMISIÓN DEPENDIENTE DE LA DENSIDAD



Fuente: ALSTAD (2001: 125).

D) El modelo dependiente de la edad

Es posible introducir supuestos más realistas en el modelo de infección, como por ejemplo la idea de una población estructurada por edades en la que los efectos son diferentes en función de la edad de los individuos. El caso que se analizará a continuación considera que el proceso de infección depende de la edad (e) de los individuos infectados. De este

modo la variación del número de individuos susceptibles de ser contagiados sigue la siguiente ecuación:

$$\frac{dS}{dt} = - \left[\int_0^{\tau} r(e') \cdot I(e', t) \cdot de' \right] \cdot S$$

$$S(0) = S_0$$

Por otra parte el número de individuos infectados puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial e} = -\lambda(e) \cdot I$$

$$I(e, 0) = I_0(e)$$

$$I(0, t) = -\frac{dS}{dt}, \quad t > 0$$

Como puede verse, aparecen de nuevo ecuaciones integrodiferenciales, al igual que ocurría en el modelo de difusión tecnológica propuesto por De CÉSARE y Di LIDDO (ver capítulo V), aunque en este caso el enfoque es diferente. Al margen de los aspectos más técnicos del modelo, lo relevante para el estudio de los mercados de redes es la forma en que se considera la posibilidad de que la población no sea homogénea en cuanto a su susceptibilidad al contagio. Por tanto, con formulaciones similares, sería posible incluir en un modelo de difusión / competencia tecnológica supuestos más realistas sobre la heterogeneidad de la población. En este caso se emplea la edad como variable de clasificación de la población, pero en la práctica es posible emplear cualquier otra variable, como la propensión al consumo de una nueva tecnología.

6. OTROS MODELOS

En el ámbito de la biología teórica existen multitud de modelos adicionales basados en la Teoría de Sistemas Dinámicos, aplicados a interacciones tan diversas como la existente entre vegetación y herbívoros (ver por ejemplo CAUGHLEY y LAWTON, 1981: 132-177) o a la depredación entre artrópodos (HASSELL, 1981: 105-131). En este capítulo nos hemos limitado a mencionar algunos de los modelos que presentan ciertas características relevantes para el estudio de los mercados de redes, pero el lector interesado en profundizar en el tema puede consultar cualquiera de los numerosos manuales de Biología Teórica que tratan este tipo de modelos.

7. CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo hemos analizado diferentes modelos, la mayoría de ellos procedentes del campo de la Biología Teórica, capaces de representar interacciones de interés para el estudio de los mercados de redes (de depredación, competitivas, cooperativas y de infección). No hemos tratado cada uno de ellos en demasiado detalle, ya que esto excedería los objetivos del libro. Simplemente se ha tratado de poner de manifiesto que dichos modelos presentan ciertas propiedades que pueden ser empleadas para modelizar mercados de redes.

En este caso destacaremos cuatro conclusiones especialmente relevantes:

- Los efectos de la **depredación** reflejan el modo en que el crecimiento de una población incide negativamente en el crecimiento de otra. Este efecto es similar al que se produce en la dinámica competitiva en mercados de redes: al aumentar la cuota de mercado de un estándar tecnológico, sus expectativas de éxito aumentan mientras disminuyen las de su rival. Por tanto los términos de las ecuaciones depredador-presa que recogen estos efectos pueden ser aplicables a la modelización de la competencia en mercados de redes. Únicamente es necesario plantearse cuál de las funciones $R(x)$ analizadas en el apartado 2.C) refleja con mayor precisión la naturaleza de esta interacción.

- Los modelos de **competencia interespecífica** surgen habitualmente como una generalización de los modelos de difusión estudiados en el capítulo V. El sistema de Lotka-Volterra aparece como una generalización de la ecuación logística, y los modelos de Mahajan y Peterson y de Altinkemer *et al.*, como una generalización de la ecuación de Bass. Estos modelos podrían ser aplicados directamente a modelizar la interacción competitiva entre estándares rivales en mercados de redes, tal y como plantean por ejemplo LÓPEZ *et al.*, (2003) y LÓPEZ y SANJUAN (2001).

- Muchos de los modelos de competencia interespecífica pueden reformularse en términos de **simbiosis**, cambiando simplemente el signo de los coeficientes de interacción. Esto ocurre con los dos modelos analizados, así como con el de MAHAJAN y PETERSON (1978b) que se estudió en el apartado 3.B). Los efectos simbióticos que se han estudiado pueden servir para representar la relación existente entre los estándares tecnológicos y sus productos complementarios. De hecho el círculo virtuoso que se produce entre ellos y que fue mencionado en el capítulo II está basado en un mecanismo idéntico al que reflejan los modelos de simbiosis estudiados.

- Respecto a los modelos de **infección parasitaria**, cabe destacar varios aspectos. En primer lugar que el proceso de contagio se suele modelizar mediante el producto de las densidades de individuos susceptibles e infectados. Por otra parte, el proceso de recuperación en un esquema de infección parasitaria tipo SIR se modeliza de forma idéntica al proceso de abandono de una tecnología en el modelo de Bass con deserciones, y además en dicho modelo aparece, al igual que ocurre en los mercados de redes, una masa crítica que ha de sobrepasarse para que se genere una epidemia. En caso de no sobrepasar dicho umbral, el número de infectados disminuye y desaparece, exactamente como ocurre en el caso de una tecnología que no alcanza la masa crítica de usuarios. Por último indicar que el modelo dependiente de la edad incorpora un elemento de interés: la estructuración por edades de la población. Como ya se analizó en el capítulo V, en el proceso de adopción tecnológica, no todos los colectivos tendrán la misma predisposición a adquirir la tecnología. Del mismo modo, el proceso de comunicación boca-a-oido tampoco tiene por qué ser homogéneo, ya que determinados colectivos pueden ser más propensos que otros a difundir la tecnología, y en este sentido el esquema matemático propuesto por éste modelo puede servir para introducir este tipo de matices. Aunque el modelo original trabaja con la edad como variable relevante, es posible aplicar el mismo modelo empleando cualquier otra.