

EXTERNALIDADES DE RED
EN LA ECONOMÍA DIGITAL

Introducción a la modelización de mercados de redes
mediante la teoría de sistemas dinámicos

JOSÉ LUIS ARROYO BARRIGÜETE

**EXTERNALIDADES DE RED
EN LA ECONOMÍA DIGITAL**

**Introducción a la modelización
de mercados de redes mediante
la teoría de sistemas dinámicos**

FUNDACIÓN RAFAEL DEL PINO

MARCIAL PONS, EDICIONES JURÍDICAS Y SOCIALES, S. A.
MADRID 2007 BARCELONA

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del «Copyright», bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

© José Luis Arroyo Barrigüete

© Fundación Rafael del Pino

© MARCIAL PONS
EDICIONES JURÍDICAS Y SOCIALES, S. A.

San Sotero, 6 - 28037 MADRID

☎ (91) 304 33 03

ISBN: 978-84-9768-380-7

Depósito legal: 2007

Diseño de la cubierta: Álvaro Reyero

Fotocomposición: JOSUR TRATAMIENTO DE TEXTOS, S. L.

Impresión: ELECÉ, INDUSTRIA GRÁFICA, S. L.

Polígono El Nogal

Río Tiétar, 24 - 28110 Algete (Madrid)

MADRID, 2007

*«La naturaleza interdisciplinar de los conceptos, modelos
y principios aplicados a sistemas proporciona una posible
aproximación hacia la unificación de la ciencia»*

*Ludwig Von BERTALANFFY
Academy of Management Journal (1972)*

A mis padres

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
PRESENTACIÓN	19
CAPÍTULO I	
INTRODUCCIÓN	
ESTRUCTURA DEL LIBRO	24
CAPÍTULO II	
EXTERNALIDADES DE RED: CONCEPTOS BÁSICOS	
1. INTRODUCCIÓN	27
2. REALIMENTACIÓN EN ECONOMÍA: CONCEPTOS GENERALES	28
3. QUÉ SON LAS EXTERNALIDADES DE RED	31
A) Consecuencias de la existencia de Externalidades de Red	32
4. TIPOS DE EXTERNALIDADES DE RED	37
5. CONCLUSIONES	40
CAPÍTULO III	
EXTERNALIDADES DE RED: CONCEPTOS AVANZADOS	
1. INTRODUCCIÓN	41
2. LA LEY DE METCALFE	42
3. LA CURVA DE DEMANDA DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED	45
A) El concepto de masa crítica de usuarios	48

	<u>Pág.</u>
4. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED	49
5. FACTORES DETERMINANTES DEL ÉXITO DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED	51
A) Precio	51
B) Expectativas de éxito	52
C) Productos complementarios	55
D) Recapitulación: Factores clave para el éxito de una tecnología sujeta a Efectos de Red.....	56
6. ESTRATEGIAS EN MERCADOS SUJETOS A EFECTOS DE RED	57
A) Transición controlada.....	60
B) Apuesta por las prestaciones.....	61
C) Innovación controlada.....	61
D) Transición abierta	61
E) Discontinuidad	62
F) Innovación abierta.....	62
G) Selección de estrategias	62
7. EL PROBLEMA DE LA MODELIZACIÓN DE MERCADOS DE REDES	63
8. CONCLUSIONES.....	65

CAPÍTULO IV

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

1. INTRODUCCIÓN	67
2. SISTEMAS DINÁMICOS: CONCEPTOS GENERALES	68
3. ATRACTORES	71
4. SISTEMAS CAÓTICOS	75
5. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	80
A) El Método de la Serie de Taylor.....	81
B) El Método de Euler.....	82
C) Los métodos de Runge-Kutta	82
a) Runge-Kutta de segundo orden ($p = 2$)	83
b) Runge-Kutta de cuarto orden ($p = 4$)	83
D) Otros métodos.....	84
6. CONCLUSIONES.....	85

CAPÍTULO V

MODELOS UNIDIMENSIONALES (DIFUSIÓN)

1. INTRODUCCIÓN	87
2. MODELOS DE DIFUSIÓN DE TIPO SIGMOIDAL: ELEMENTOS BÁSICOS	89
3. MODELOS DE DIFUSIÓN DE TIPO SIGMOIDAL: UNA REVISIÓN TEÓRICA	92
A) Modelo Gompertz	93
B) Modelo Gaussiano	96
C) Modelo Log-Normal	97
CH) Modelo Weibull	97
D) Modelo Log-Recíproco	98
E) Modelo Gamma	99
F) Modelo Beta	100
G) Modelo de Singh y Maddala.....	100
H) Modelo Adaptativo Polinómico	101
I) Modelo Logístico Básico.....	101
J) Modelo Logístico Local.....	103
K) Modelo Logístico de Chow.....	104
L) Modelo de Paloheimo y Dickie	105
M) Modelo de Bass	105
N) Modelo de Bass con deserciones	108
Ñ) Modelo de Bass con tres etapas.....	109
O) Modelo de Bass con efectos publicitarios	109
P) Modelo de Floyd.....	111
Q) Modelo de Sharif y Kabir	111
R) Modelo Stanford	112
S) Modelo de Jeuland.....	112
T) Modelo FLOG	113
U) Modelo NUI.....	114
V) Modelo NSRL.....	115
W) Modelo de Bertalanffy	115
X) Modelo de Birch	116
Y) Modelo de Michaelis-Mentel Generalizado.....	117
Z) Otros modelos.....	117
a) Modelo KKKI.....	117
b) Modelo de Harvey	118
c) Modelo de Nicholson	118
d) Modelo de De Cesare y Di Liddo	120
4. CLASIFICACIÓN Y SÍNTESIS DE MODELOS DE DIFUSIÓN ...	122
5. EXTENSIONES DE LOS MODELOS DE DIFUSIÓN	131
6. CONCLUSIONES.....	131

CAPÍTULO VI
MODELOS MULTIDIMENSIONALES
(COMPETENCIA)

1. INTRODUCCIÓN.....	133
2. MODELOS DE PREDADOR-PRESA.....	136
A) Modelo Lotka-Volterra depredador-presa sin competencia intraespecífica.....	136
B) Modelo Lotka-Volterra depredador-presa con competencia intraespecífica.....	138
C) Modelos depredador-presa avanzados.....	139
3. MODELOS DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA.....	140
A) Modelo Lotka-Volterra de competencia interespecífica.....	140
B) Modelo de Mahajan y Peterson.....	146
C) Modelo de Altinkemer <i>et al.</i>	146
4. MODELOS DE MUTUALISMO.....	147
A) Lotka-Volterra de simbiosis sin competencia intraespecífica....	148
B) Lotka-Volterra de simbiosis con competencia intraespecífica...	148
C) Otros modelos.....	149
5. MODELOS DE INFECCIÓN.....	150
A) El modelo SI con transmisión dependiente de la densidad.....	150
B) El modelo SIR.....	151
C) El modelo SIR con transmisión dependiente de la densidad.....	153
D) El modelo dependiente de la edad.....	153
6. OTROS MODELOS.....	154
7. CONCLUSIONES.....	155

CAPÍTULO VII
ALGUNOS EJEMPLOS

1. INTRODUCCIÓN.....	157
2. MODELO BASE.....	158
A) Generalización del modelo Gompertz.....	158
B) Generalización del modelo logístico: ecuaciones de Lotka-Volterra.....	162
3. EJEMPLO 1: ALGUNAS MEJORAS AL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA.....	163
A) Incorporación de los efectos de la congestión.....	166
B) Evolución sigmoideal.....	167
C) Tendencia a la adopción de un único estándar.....	169
D) Sensibilidad a las condiciones iniciales.....	170
E) Efectos de la congestión.....	172
F) Conclusiones del modelo.....	174

	<u>Pág.</u>
4. EJEMPLO 2: EFECTO DE LOS PRODUCTOS COMPLEMENTARIOS	174
A) Característica 1	176
B) Característica 2	177
C) Característica 3	178
D) Característica 4	180
E) Conclusiones del modelo	181
5. CONCLUSIONES.....	182

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

1. IMPLICACIONES ACADÉMICAS Y DIRECTIVAS	184
A) Implicaciones directivas.....	184
B) Implicaciones académicas.....	184
2. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.....	185
A) Marco teórico.....	185
B) Desarrollo de modelos explicativos/predictivos.....	186
BIBLIOGRAFÍA	187
ANEXOS	209

ANEXO 1

TRABAJANDO CON «R»

1. UTILIZANDO LOS MODELOS DE DIFUSIÓN EN LA PRÁCTICA	210
--	-----

ANEXO 2

ALGUNOS EJEMPLOS

1. MENSAJERÍA INSTANTÁNEA	217
2. SISTEMAS OPERATIVOS.....	218
A) Windows y Linux.....	219
3. TECNOLOGÍAS DE VÍDEO.....	220
A) Betamax vs. VHS.....	220
4. EL FAX.....	222

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.1: Esquema del libro	25
Figura 2.1: Esquema de un Sistema con Realimentación Negativa.....	28
Figura 2.2: Esquema de un Sistema con Realimentación Positiva.....	30
Figura 2.3: Sistema con feedforward y feedforward con feedback.....	31
Figura 2.4: Realimentación positiva en los mercados de redes.....	34
Figura 2.5: Home de neurona.com	38
Figura 2.6: Home de linkedin.com	38
Figura 3.1: Curva de demanda de una tecnología sujeta a Efectos de Red	45
Figura 3.2: Construcción de la curva de demanda de una tecnología sujeta a Efectos de Red	46
Figura 3.3: Diferentes curvas de demanda de una tecnología sujeta a Efectos de Red	48
Figura 3.4: Masa crítica de usuarios	49
Figura 3.5: Difusión de una tecnología sujeta a Realimentación Positiva	50
Figura 3.6: Interdependencia entre fabricantes y proveedores de productos complementarios.....	56
Figura 3.7: Factores clave del éxito de una tecnología sujeta a Efectos de Red	56
Figura 3.8: Estrategias en mercados con Efectos de Red.....	57
Figura 3.9: Proceso de selección de estrategias	63
Figura 3.10: Estrategias en mercados con Efectos de Red: Dificultad Vs Beneficios potenciales.....	64
Figura 4.1: Ejemplo de punto fijo	72
Figura 4.2: Ejemplo de atractor periódico.....	72
Figura 4.3: Atractor Cuasi Periódico o Toro	73
Figura 4.4: Atractor extraño de Rössler.....	75

	<u>Pág.</u>
Figura 4.5: Sensibilidad a las condiciones iniciales en sistemas caóticos	76
Figura 4.6: Comportamiento de la ecuación de Mackey-Glass para distintos valores de uno de sus parámetros.....	79
Figura 5.1: Categorías de adoptantes para un proceso de difusión de tipo sigmooidal según Rogers (1962: 162).....	90
Figura 5.2: Distribución de frecuencias no acumuladas para un proceso de difusión según el modelo de Bass	91
Figura 5.3: Modelo Gompertz Básico	95
Figura 5.4: Comportamiento de distintos modelos de difusión.....	99
Figura 5.5: Velocidad de difusión de las ecuaciones logística y Gompertz	103
Figura 5.6: Distintos comportamientos de la ecuación de Nicholson	120
Figura 5.7: Relaciones entre los modelos estudiados (I).....	126
Figura 5.8: Relaciones entre los modelos estudiados (II)	127
Figura 5.9: Unificación de los modelos estudiados (I).....	128
Figura 5.10: Unificación de los modelos estudiados (II)	129
Figura 5.11: Unificación de los modelos estudiados (III)	130
Figura 6.1: Diferentes tipos de relación entre estándares tecnológicos...	134
Figura 6.2: Comportamiento de la ecuación de Lotka-Volterra depredador-presa sin competencia intraespecífica ($a = 0.9$, $b = 0.1$, $c = 0.05$, $d = 0.6$).....	137
Figura 6.3: Formulaciones alternativas para la respuesta de los depredadores a cambios en la densidad de presas	139
Figura 6.4: Modelo Lotka-Volterra de competencia interespecífica: escenario 1	142
Figura 6.5: Modelo Lotka-Volterra de competencia interespecífica: escenario 2	143
Figura 6.6: Modelo Lotka-Volterra de competencia interespecífica: escenario 3	143
Figura 6.7: Modelo Lotka-Volterra de competencia interespecífica: escenario 4	144
Figura 6.8: Comportamiento del sistema Lotka-Volterra de competencia interespecífica para cierta combinación de parámetros y 3 tecnologías	145
Figura 6.9: Esquema de un proceso SI con transmisión dependiente de la densidad	150
Figura 6.10: Evolución de un sistema SIR	152
Figura 6.11: Proceso SIR con transmisión dependiente de la densidad...	153
Figura 7.1: Evolución sigmooidal del modelo de competencia tipo Gompertz (I)	160
Figura 7.2: Evolución sigmooidal del modelo de competencia tipo Gompertz (II)	161
Figura 7.3: Evolución sigmooidal del modelo de competencia tipo Gompertz (III).....	161

	Pág.
Figura 7.4: Evolución sigmoïdal del modelo de Lotka-Volterra	163
Figura 7.5: Proceso de sustitución de un estándar instalado según las ecuaciones de Lotka-Volterra modificadas.....	165
Figura 7.6: Evolución sigmoïdal de las ecuaciones de Lotka-Volterra modificadas incorporando la Ley de Metcalfe Modificada.....	168
Figura 7.7: Equilibrio final del modelo para distintos valores de sus coeficientes r_i	169
Figura 7.8: Equilibrio final del modelo para distintos valores de los coeficientes r_i partiendo de condiciones iniciales diferentes: planteamiento teórico	170
Figura 7.9: Equilibrio final del modelo para distintos valores de los coeficientes r_i partiendo de condiciones iniciales diferentes: predicción del modelo.....	171
Figura 7.10: Comparación del modelo de Lotka-Volterra modificado y el modelo propuesto.....	173
Figura 7.11: Evolución temporal del modelo para diferentes puntos de inicio de las externalidades de congestión	173
Figura 7.12: Evolución temporal de un estándar sujeto a efectos de red (condiciones 1a y 1b).....	176
Figura 7.13: Equilibrio final del modelo para distintos valores de sus coeficientes EP (condición 2a).....	177
Figura 7.14: Equilibrio final del modelo para distintos valores de sus coeficientes (condiciones 2b a 2e)	179
Figura 7.15: Equilibrio final del modelo para distintos valores de los coeficientes EP partiendo de condiciones iniciales diferentes (condición 3).....	180
Figura 7.16: Equilibrio final del modelo para distintos valores de los coeficientes EP en el caso de productos complementarios diferentes (condición 4a)	181
Figura ANEXO 1. 1: Home de r-project	209
Figura ANEXO 2. 1: Reproductores de vídeo del formato Betamax y VHS.....	221

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 5.1: Síntesis de modelos de difusión estudiados (I)	122
Tabla ANEXO 1. 1: Evolución del número de Host de Internet	211
Tabla ANEXO 1. 2: Contraste de hipótesis para el modelo Bass	213
Tabla ANEXO 1. 3: Comparación de los diferentes modelos según el ER.	214

PRESENTACIÓN

La globalización de las modernas economías de mercado ha alterado de forma significativa las conductas empresariales y ha fomentado la utilización de las nuevas tecnologías. La competencia ha alcanzado una nueva dimensión y los mercados relevantes han ampliado su dimensión territorial. El mundo económico es más grande pero las distancias tienen una dimensión temporal menor. En este nuevo marco, las Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones (TIC) revisten una importancia especial pues, al reducir de forma significativa el coste de obtención de la información y, en consecuencia, el coste de los procesos productivos, inciden directa o indirectamente en la competitividad empresarial. Poco a poco, las TIC van adquiriendo la característica de bienes básicos, tal como los definió P. SRAFFA.

Con este marco conceptual como referencia, José Luis ARROYO ha abordado un tema tan complejo como las Externalidades de Red. Es sabido que la existencia de redes ha tenido un impacto directo sobre el concepto de posición de dominio y su eventual abuso pues, con independencia de los beneficios que las redes compartidas por una gran proporción de usuarios puedan tener sobre los usuarios de las mismas, el eventual dominio de una red o de algunas redes con frecuencia es transitorio ya que resulta permanentemente amenazado por la posible irrupción en el mercado de una nueva red que pueda dejar sin opciones competitivas a los incumbentes menos eficientes.

El estudio de estas cuestiones no es sencillo y requiere conocimientos robustos y diversos. El autor las ha abordado con energía y con un sólido andamiaje teórico, alejándose de la tradición, tan cómoda pero, también, tan poco creativa. Los instrumentos habituales no han sido sufi-

cientes. Ha sido necesario aventurarse por los complejos vericuetos de las ciencias (la biología matemática, por ejemplo) para encontrar nuevos instrumentos de análisis que permitan adentrarse por el laberinto teórico de los Sistemas Dinámicos.

Al final, toda la estructura construida en las diversas secciones del libro permite abordar la apasionante cuestión de las interacciones competitivas y cooperativas, preludio de una modelización rica en matices y prometedora como referencia de un modo moderno de entender la actividad empresarial en un mundo nuevo. Como complemento necesario, la investigación discurre acompañada de una auténtica enciclopedia de referencias teóricas y modelos.

Todo ello hace que el trabajo realizado sea un claro ejemplo del tipo de investigación que debe realizarse en nuestras universidades: elegir un tema de actualidad y llevar a cabo una investigación valiente con aportaciones significativas.

Algo todavía escaso, que justifica la colaboración de la **Fundación Rafael del Pino** con el trabajo de José Luis ARROYO y pone de manifiesto que el camino iniciado por el investigador debe proseguir en busca de nuevos resultados.

Amadeo PETITBÒ

Director de la Fundación Rafael del Pino

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Desde hace algunos años el desarrollo de las denominadas Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) están alterando de forma significativa el modo de funcionamiento de algunas empresas y sectores (LÓPEZ SÁNCHEZ y SANDULLI, 2001), no sólo reduciendo de forma significativa el tiempo y coste de procesamiento de todo tipo de información sino también modificando el modo en que empresas y mercados gestionan el flujo de bienes y servicios a través de sus cadenas de valor (MALONE *et al.*, 1987; PORTER y MILLAR, 1986). Aunque las teorías y conceptos desarrollados en el ámbito de la Economía tradicional siguen siendo válidos, el cambio tecnológico hace necesarias una serie de matizaciones y nuevos desarrollos que permitan explicar el funcionamiento de las empresas en la Economía Digital.

Como indica el título de este libro, el principal objetivo que se persigue es analizar una de las características que más interés ha despertado en este nuevo contexto económico: las Externalidades de Red. Estos efectos, que pueden definirse como el incremento de utilidad que obtiene un usuario del consumo de un producto a medida que aumenta el número de usuarios que consumen ese mismo producto (KATZ y SHAPIRO, 1985), introducen una dinámica en el mercado que hace que el precio que los usuarios están dispuestos a pagar esté en parte determinado por el tamaño de la red a la que pertenece el producto (BRYNJOLFSSON y KEMERER, 1996). No se trata de un fenómeno novedoso en Economía, puesto que aparece en determinadas redes físicas como el ferrocarril o el teléfono, pero su presencia en los mercados electrónicos es tan frecuente que ha suscitado un renovado interés entre la comunidad académica.

De hecho, como señalan algunos autores (por ejemplo MCGEE y SAMMUT, 2002; AMIT y ZOTT, 2001; SHAPIRO y VARIAN, 1999a; BESEN y FARELL, 1994) una de las características esenciales de la Economía Digital son los Efectos de Red. SHAPIRO y VARIAN (1999a: 165) llegan incluso a afirmar que «Hay una diferencia fundamental entre la “nueva” y la “antigua” economía: la vieja economía industrial estaba impulsada por las economías de escala; la nueva economía de la información está impulsada por la economía de las redes».

En línea con lo anterior, MCGAHAN y MITCHELL (2002) plantean que en la investigación en Dirección Estratégica, existen una serie de conceptos de gran relevancia¹ que «no encajan fácilmente con ninguno de los marcos conceptuales existentes, pero presentan el potencial de crear vínculos entre teorías existentes y desarrollar otras nuevas. Aunque muchas de estas ideas se apoyan en otras disciplinas, sólo la Dirección Estratégica tiene el potencial de integrar las diferentes aportaciones». Estos autores identifican las Externalidades de Red como uno de estos conceptos. De esta afirmación pueden extraerse tres conclusiones de gran relevancia:

1. El estudio de las Externalidades de Red resulta crítico en la investigación actual en Dirección de Empresas.
2. Ningún marco teórico encaja perfectamente con su estudio.
3. El estudio de las Externalidades de Red debe abordarse desde una óptica interdisciplinar. En este sentido merece la pena mencionar que este tema no sólo atrae la atención de investigadores del campo de la Economía, el Marketing y la Dirección de Empresas: físicos y matemáticos están cada vez más interesados en el análisis de los mercados de redes, como lo demuestra la aparición, cada vez más frecuente, de publicaciones sobre el tema en revistas de estas áreas (sirvan de ejemplo las publicaciones en *Physica A* de LÓPEZ *et al.*, 2003 y LÓPEZ y SANJUÁN, 2001).

Y sin embargo, pese a su considerable interés académico, determinados aspectos de las Externalidades de Red no han sido estudiados con suficiente detalle. Aunque se ha realizado una considerable cantidad de investigación teórica, el número de trabajos empíricos resulta mucho más limitado, debido principalmente a la escasez de datos, tal y como señalan numerosos investigadores (GOWRISANKARAN y STAVINS, 2004; STAVINS, 2003; KAUFFMAN *et al.*, 2000; BRYNJOLFSSON y KEMERER, 1996; SALONER y SHEPARD, 1995), y la mayoría de estos trabajos empíricos se han centrado en una única categoría de productos (SCHILLING, 2002;

¹ Que estos autores denominan *wild cards*.

WADE, 1995). Y adicionalmente, salvo notables excepciones, no se ha desarrollado demasiada investigación desde la óptica de la Dirección de Empresas.

Por tanto, desde el punto de vista académico, es necesario profundizar en el estudio de los mercados de redes. Un ejemplo tangible de la importancia de este tipo de investigación la encontramos en el *Net Institute* (www.netinst.org), dirigido por Nicholas ECONOMIDES del *Stern School of Business (New York University)*, que ofrece anualmente 15 becas para trabajos realizados en este campo.

Desde el punto de vista de la práctica profesional también resulta un tema de gran relevancia. Existen numerosos ejemplos históricos de procesos de difusión y competencia entre estándares tecnológicos sujetos a Efectos de Red, como por ejemplo la elección del ancho de vía para el ferrocarril, la batalla entre los estándares de teclados QWERTY y DVORAK, la difusión del Fax o la pugna entre el estándar VHS y el Betamax. En la actualidad vemos estos efectos, por ejemplo, en el mercado de los sistemas operativos para PCs, de las aplicaciones ofimáticas (como las hojas de cálculo), de las consolas de videojuegos o en los sistemas messenger de mensajería instantánea. También en los mensajes multimedia, *MMS*, y en la videollamada. Realmente la lista de productos que se ven afectados por la presencia de Externalidades de Red, ya sean directas, indirectas o de aprendizaje, es enorme.

Y su importancia es creciente debido a su extraordinaria presencia en la Economía Digital. El caso de Microsoft y sus demandas por monopolio es un buen ejemplo, pero a medio plazo la realidad empresarial se verá de nuevo convulsionada por este tipo de efectos. Un ejemplo, que ya aparece con frecuencia en la prensa económica, es la batalla entre los formatos de la próxima generación de DVDs: «HD DVD», impulsado por Toshiba, frente a la alternativa que impulsa Sony, «Blu-ray Disc». Mayor impacto aún tendrá la lucha por el control de los sistemas operativos para teléfonos móviles.

Por tanto el estudio de las Externalidades de Red no es algo con un interés puramente académico, sino que se trata de un aspecto clave para entender la realidad empresarial actual. Puede servir de ejemplo, de manera casi anecdótica, la campaña publicitaria lanzada por Movistar en los últimos meses de 2005. Dicha campaña, bajo el lema «como somos más, pagamos menos» pretende poner de manifiesto la existencia de Externalidades de Red directas en el mercado de la telefonía móvil. El hecho de que una compañía como Movistar articule su publicidad en torno a este concepto, es un claro indicador de su relevancia.

Como conclusión queda claro que, también desde el punto de vista de la práctica profesional, es de gran interés contar con modelos capaces de explicar y predecir la evolución de los mercados de redes.

ESTRUCTURA DEL LIBRO

Este libro está estructurado en dos partes diferentes, con un capítulo que sirve de puente entre ambas para aquellos lectores que no cuenten con una formación previa en la Teoría de Sistemas Dinámicos. En este sentido el libro es autocontenido, y no se requieren conocimientos específicos previos, aunque una buena formación matemática puede ayudar en la lectura de la segunda parte.

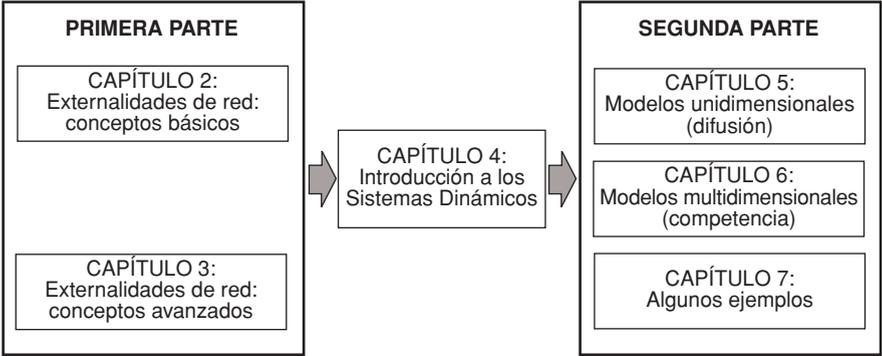
En la primera parte (capítulos II y III) se introducen los conceptos teóricos relacionados con los Efectos de Red, siendo el capítulo II una revisión de los conceptos elementales y el capítulo III una profundización en aspectos más técnicos. Aquellos lectores que sólo deseen una primera aproximación al tema, pueden decidir no continuar con la segunda parte del libro, obviando así todo lo concerniente a la modelización matemática de los mercados de redes. En estos dos capítulos encontrarán abundante bibliografía y un repaso a la mayoría de las ideas relevantes sobre este tipo de mercados.

El capítulo IV está destinado a introducir muy brevemente los principales conceptos de la Teoría de Sistemas Dinámicos. En él se lleva a cabo un somero repaso obviando los aspectos más técnicos, con la finalidad de que el lector que no esté familiarizado con dicha teoría encuentre en este capítulo la base necesaria para abordar la segunda parte del texto. Del mismo modo, aquellos lectores que conozcan los fundamentos de los Sistemas Dinámicos, pueden obviar este capítulo puente y pasar directamente a los siguientes.

En la última parte del libro se van planteando, en orden creciente de complejidad, diversos modelos aplicables al estudio de los mercados de redes:

- En el capítulo V se plantean modelos unidimensionales capaces de representar procesos de difusión de productos de red.
- En el capítulo VI se introducen interacciones competitivas y cooperativas, estudiando modelos multidimensionales procedentes de distintas áreas de conocimiento, que plantean algún elemento relevante de cara a la modelización de mercados de redes.
- Por último, en el capítulo VII se plantean algunos posibles modelos específicos para este tipo de mercados y se estudian sus propiedades más relevantes.

FIGURA 1.1
ESQUEMA DEL LIBRO



Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO II

EXTERNALIDADES DE RED: CONCEPTOS BÁSICOS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es introducir las ideas fundamentales relacionadas con las Externalidades de Red: el concepto de realimentación positiva y negativa, la definición de Externalidad/Efecto de Red y los diferentes tipos que pueden darse.

1. INTRODUCCIÓN

En primer lugar es preciso realizar una matización terminológica, ya que aunque en la literatura muchas veces se emplean como sinónimos los términos Externalidades de Red y Efectos de Red, realmente no se trata del mismo concepto, como indicaron LIEBOWITZ y MARGOLIS (1995a y 1994). Para que exista una Externalidad debe producirse un fallo en el mercado, de modo que los participantes en el mismo no sean capaces de internalizar el beneficio generado por un nuevo actor. Por este motivo, dado que en presencia de Externalidades el valor para un nuevo usuario es menor que el valor social que éste aportaría, se alcanzará un tamaño de la red inferior al tamaño óptimo eficiente. Sin embargo, en redes esponsorizadas (determinados actores mantienen la propiedad y derechos sobre la red) no hay obstáculos para que el propietario de la misma internalice estos efectos, de modo que existirían Efectos de Red, pero no Externalidades. Como afirman LIEBOWITZ y MARGOLIS (1995a) la mayoría de las externalidades pueden ser eliminadas redefiniendo correc-

tamente los derechos de propiedad, ya que si por ejemplo el mantenimiento exterior de un edificio genera beneficios externos en sus proximidades, hacer que estas zonas próximas sean propiedad colectiva de los dueños del edificio internaliza esta externalidad solucionando el problema. Sin embargo no todas las redes son susceptibles de ser esponsorizadas (p.e. la red de individuos que hablan inglés), de modo que las Externalidades de Red pueden darse en determinados casos.

No obstante, aunque se trata de una discusión económica muy interesante, no es la finalidad de este libro analizar bajo qué condiciones puede o no considerarse que hablamos de Efectos o de Externalidades de Red, de modo que en adelante se emplearán ambos términos como sinónimos, al igual que hacen por ejemplo ECONOMIDES (2001) o YOFFIE (1996).

2. REALIMENTACIÓN EN ECONOMÍA: CONCEPTOS GENERALES

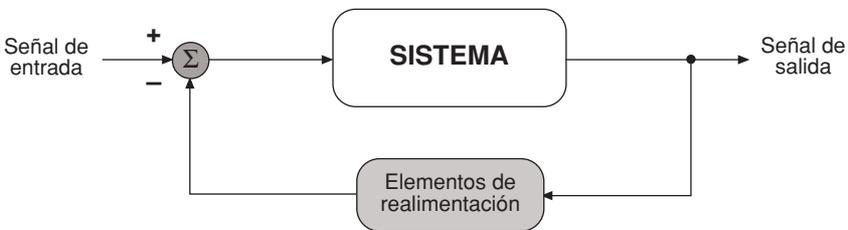
La realimentación, también conocida como retroalimentación o *feedback*, es uno de los procesos fundamentales en la naturaleza, ya que se encuentra en todo tipo de sistemas, tanto físicos o biológicos como económicos. Puede definirse como el proceso mediante el que una parte de la salida se introduce a la entrada para que participe en el sistema de excitación (MILLMAN y GRABEL, 1993: 497). Es posible a su vez distinguir entre dos tipos distintos de realimentación: positiva y negativa.

En el caso de la realimentación negativa (figura 2.1), la señal de salida es realimentada en una forma funcional, determinada por los ele-

FIGURA 2.1

ESQUEMA DE UN SISTEMA CON REALIMENTACIÓN NEGATIVA

Realimentación Negativa



Fuente: Elaboración propia.

mentos de realimentación, para pasar a un detector de error donde es restada de la señal de entrada, de modo que sea la diferencia de ambas la que actúe sobre el sistema (PUENTE, 1993: I-1-7). Este tipo de realimentación tiende a mantener la estabilidad del sistema, ya que cualquier perturbación que se produzca tenderá a ser absorbida por el mismo.

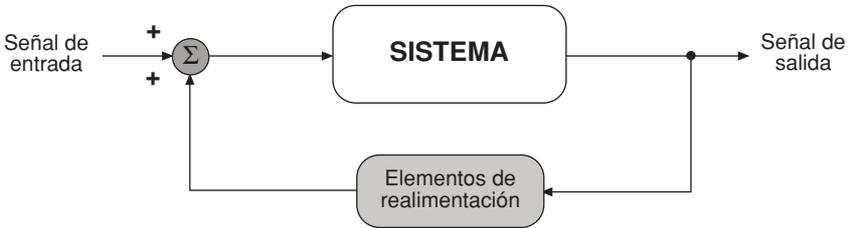
Probablemente uno de los ejemplos más conocidos de realimentación negativa sea el que se produce en los sistemas electrónicos. Los amplificadores realimentados negativamente presentan importantes ventajas, como la desensibilización respecto a variaciones debidas a las tolerancias de sus componentes o la reducción del ruido (MILLMAN y GRABEL, 1993: 507-512), de modo que son empleados con profusión en todo tipo de circuitos. En el ámbito de la Economía y la Dirección de Empresas también pueden encontrarse ejemplos de *feedback* negativo, como el caso de la subida de los precios del petróleo en los años setenta, cuando las posteriores medidas de ahorro energético combinadas con una mayor actividad exploratoria condujeron a una nueva caída de los precios (ARTHUR, 1990). Otro ejemplo se encuentra en los oligopolios industriales en su fase madura (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 167-168). En este caso, el incremento en la complejidad de gestión de una empresa a medida que crece, junto a la reacción de los competidores establecidos, lleva a una situación de equilibrio en la que no existe un único vencedor sino distintas compañías en competencia con diferentes cuotas de mercado. Y en el contexto de la Economía Digital también aparece la realimentación negativa, debido por ejemplo a que el rápido crecimiento de una compañía puede conducir a un deterioro en la calidad de servicio (OLIVA *et al.*, 2003).

De hecho, gran parte de la teoría económica clásica está fundamentada en la existencia de realimentación negativa, que lleva a los sistemas considerados a un punto de equilibrio, estabilizando cualquier perturbación que se introduzca en el mismo (MCGEE y SAMMUT, 2002; ARTHUR, 1990). Sin embargo, en determinados ámbitos de la economía no aparece este tipo de *feedback*, sino que por el contrario cualquier perturbación tiende a ser amplificada como consecuencia de la llamada realimentación positiva, lo que lleva a la existencia de múltiples posibles puntos de equilibrio (DAVID, 1993).

La realimentación positiva sigue un esquema similar a la negativa, salvo que en este caso la señal realimentada se suma a la señal de entrada como se indica en la figura 2.2. A diferencia de la realimentación negativa, que atenúa los efectos de las perturbaciones, la realimentación positiva amplifica dichos efectos. Analicemos este fenómeno con un ejemplo muy sencillo. Supongamos que se produce una perturbación en la señal de entrada (E), de modo que ésta se incrementa provocando un

FIGURA 2.2

ESQUEMA DE UN SISTEMA CON REALIMENTACIÓN POSITIVA

Realimentación Positiva

Fuente: Elaboración propia.

aumento en la señal de salida (S). La señal realimentada (R) también se verá por tanto incrementada. En el caso de la realimentación negativa, dado que R ha aumentado, la señal de entrada al sistema que resulta de la diferencia entre E y R disminuirá, disminuyendo por tanto la señal de salida S. De este modo se ha compensado la perturbación introducida al sistema. Por el contrario, en el caso de la realimentación positiva la señal de entrada al sistema que resulta de la suma entre E y R aumentará, con lo que la señal de salida S se verá aún más incrementada, aumentando por tanto el efecto de la perturbación inicial.

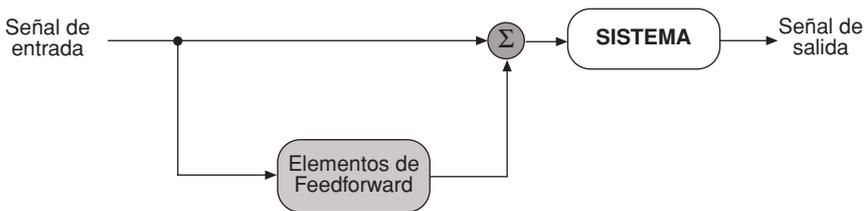
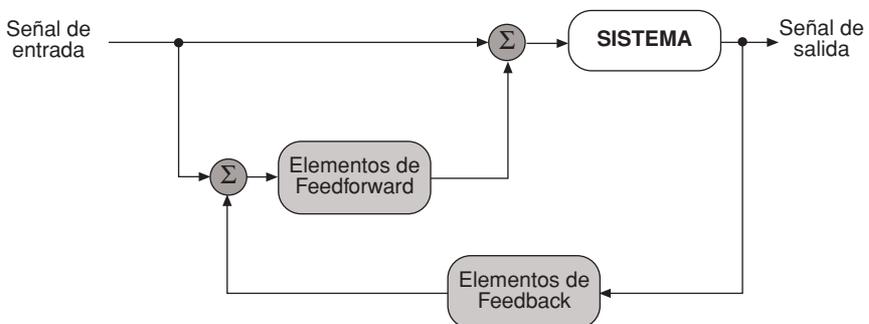
Existen numerosos ejemplos de competencia entre estándares tecnológicos sujetos a este último tipo de realimentación. Entre ellos podemos citar la competencia entre corriente alterna y continua en el siglo XIX, la elección del ancho de vía para el ferrocarril, los teclados de ordenador QWERTY¹ y DVORAK, el vídeo VHS frente al Betamax y en la actualidad el VHS frente al DVD, los CDs frente a las cintas de audio, la competencia entre hojas de cálculo, los sistemas operativos para PCs y un largo etcétera (ver por ejemplo SCHILLING, 2002; SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 197-213; LOCH y HUBERMAN, 1999; GATES, 1998: 49-54; DAVID, 1985).

¹ El caso de los teclados QWERTY (inventados por Christopher Sholes) frente a los DVORAK (inventados por August Dvorak) ha suscitado una cierta polémica en el entorno académico. Este caso suele ponerse como ejemplo, especialmente tras los trabajos de DAVID (1985 y 1986), de cómo una tecnología inferior (QWERTY) queda establecida como estándar frente a otra superior (Dvorak) como consecuencia de las Externalidades de Red. Sin embargo LIEBOWITZ y MARGOLIS (1990) afirmaron que realmente no se trataba de un buen ejemplo, ya que, entre otros motivos que los autores exponían, en su opinión no existían evidencias reales de la superioridad de los teclados DVORAK, o al menos ésta no compensaba los costes de cambio. Posteriormente estos mismos autores (LIEBOWITZ y MARGOLIS, 1995b) arremetían con gran dureza contra gran parte de la literatura teórica desarrollada sobre este tema por seguir empleando el caso de los teclados QWERTY como ejemplo paradigmático pese a su artículo del año 1990.

Para finalizar este apartado es preciso mencionar que además de los procesos de *feedback*, es posible encontrar otra serie de bucles en determinado tipo de sistemas. El *feedforward*, por ejemplo, empleado principalmente en el ámbito de los procesos químicos industriales, consiste en detectar perturbaciones en la señal de entrada al sistema y actuar sobre ellas (o sobre otra variable de entrada), de modo que se evita que dichas perturbaciones se introduzcan en el sistema (LUYBEN, 1996: 383-386). Lógicamente es posible concebir sistemas que combinen de forma simultánea tanto el *feedback* como el *feedforward*, tal y como se muestra en la figura 2.3.

FIGURA 2.3

SISTEMA CON FEEDFORWARD Y FEEDFORWARD CON FEEDBACK

Feedforward**Feedforward y Feedback**

Fuente: Elaboración propia.

3. QUÉ SON LAS EXTERNALIDADES DE RED

El concepto de externalidad en economía hace referencia al modo en que un participante en el mercado afecta a los demás sin que medie

ningún tipo de compensación económica (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 175). Estas externalidades pueden ser positivas, si el efecto que se produce en los demás participantes es beneficioso, y negativas en caso contrario. Las Externalidades de Red constituyen un tipo particular de externalidades, y son generadas por un usuario al conectarse a una red, pudiendo ser ésta una red física (como el teléfono) o virtual (como los sistemas operativos), ya que estas últimas pueden generar efectos de realimentación similares a los producidos por las redes físicas (HELLOFS y JACOBSON, 1999).

Podemos hablar también en este caso de Externalidades de Red Positivas, si la cantidad de un bien demandada por un consumidor representativo aumenta en respuesta al crecimiento de las compras de otros (realimentación positiva), y Externalidades de Red Negativas², en las que ocurre lo contrario. La mayor parte de las Externalidades de Red son positivas (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 175), de modo que el estudio se centrará en ellas, aunque también pueden aparecer externalidades de red negativas derivadas por ejemplo de la congestión (ZODROW, 2003; LIEBOWITZ y MARGOLIS, 1994).

Es posible definir por tanto las Externalidades de Red Positivas³, también llamadas en ocasiones economías de escala desde el lado de la demanda o Economías de Red, como «aquellos efectos que hacen que el valor de un producto o servicio para un usuario dependa no sólo del producto en sí mismo sino del número de usuarios que utilicen dicho producto o servicio» (FUENTELESAZ *et al.*, 2003). Una definición alternativa empleando términos más económicos sería la propuesta por KATZ y SHAPIRO (1985), quienes definen las Externalidades de Red como «el incremento de utilidad que obtiene un usuario del consumo de un producto a medida que se incrementa el número de usuarios que consumen ese mismo producto». En cualquier caso, queda claro que la clave para la aparición de Externalidades de Red es la existencia de cierta complementariedad y/o interacción entre la tecnología de los distintos usuarios individuales (ECONOMIDES, 1996a; ECONOMIDES y HIMMELBERG, 1995a).

A) Consecuencias de la existencia de Externalidades de Red

Las Externalidades de Red producen dos efectos fundamentales en la dinámica de la Industria (KATZ y SHAPIRO, 1986):

² Ver por ejemplo el trabajo de RIGGINS *et al.* (1994), en el que se modela el crecimiento de un Sistema de Información Interorganizacional en presencia de externalidades de red negativas.

³ En adelante se empleará el término Externalidades de Red para hacer referencia exclusivamente a las positivas. Cuando se haga referencia a las negativas se explicitará que son de este tipo.

- **Modifican el atractivo de la red** generando economías de escala del lado de la demanda. Esto implica que el precio que los usuarios pagan está en parte determinado por el tamaño de la red a la que pertenece el producto (BRYNJOLFSSON y KEMERER, 1996).

- Hacen que los potenciales consumidores consideren en su decisión de compra las **expectativas futuras de éxito** de las distintas redes en competencia.

En el ámbito de las TIC es frecuente que aparezcan este tipo de externalidades (ARTHUR, 1996; ROHLFS, 1974) debido a que algunas de las redes de tecnología⁴ presentan muchas similitudes con las redes reales.

Sin embargo incluso en los mercados electrónicos no siempre aparecen este tipo de efectos, como ocurre por ejemplo en el caso de los buscadores⁵ de Internet (LÓPEZ SÁNCHEZ *et al.*, 2004) y pese a que su presencia resulta obvia en determinados ámbitos, en ocasiones es preciso recurrir a un estudio detallado para detectar su existencia. En este sentido sirve de ejemplo el trabajo de GOWRISANKARAN y STAVINS (2004), quienes propusieron un método basado en tres test diferentes para evaluar la existencia de Efectos de Red para los pagos electrónicos, y posteriormente (la publicación del artículo no coincide con la fecha de su redacción) STAVINS (2003) aplicó en otro trabajo dos de estos test con un objetivo muy similar.

Estos Efectos de Red producen una realimentación positiva en los mercados que hace a las tecnologías fuertes más fuertes (círculo virtuoso) y a las débiles más débiles (círculo vicioso), de modo que en muchos casos se produce la adopción de una única tecnología quedando el resto eliminadas, fenómeno conocido como *winner takes all*⁶ (PARDOLESI y RENDA, 2004; MCGEE y SAMMUT, 2002). La figura 2.4 ilustra esta idea: la realimentación positiva hace que la cuota de mercado de dos tecnologías rivales evolucione de manera muy diferente.

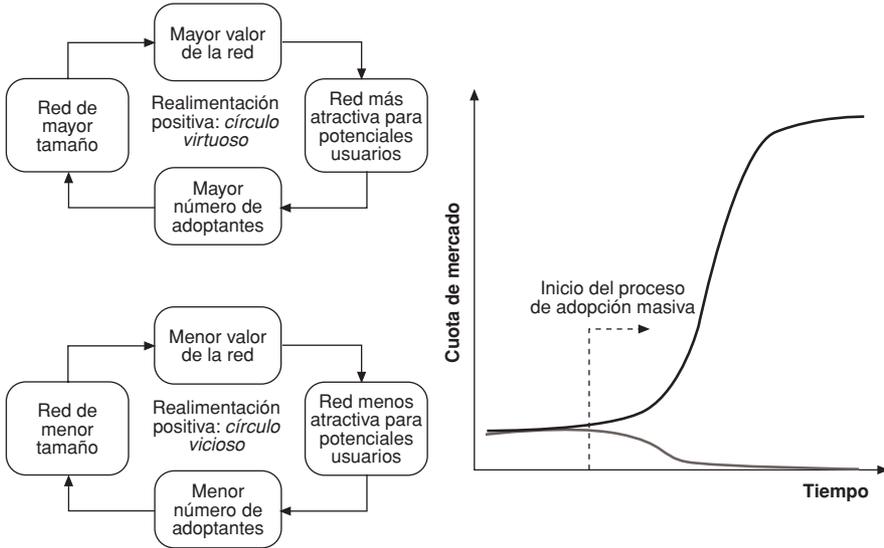
⁴ En la presente investigación se emplearán como sinónimos los términos «tecnología» y «estándar». De este modo, al hablar de competencia entre tecnologías se hace referencia a la competencia entre estándares tecnológicos (p.e. competencia entre las tecnologías VHS y Beta-max).

⁵ Aunque en este caso podría argumentarse la existencia de ciertos Efectos de Red indirectos, derivados de que la programación web se optimice para el navegador más popular.

⁶ Otros autores prefieren emplear el término *winner takes most* (ver por ejemplo ECONOMIDES, 2003; AMIT y ZOTT, 2001). De hecho VARADARAJAN y YADAV (2002) consideran más apropiado hablar de mercados *tippy*, ya que el término *winner takes all* induce a pensar que ninguna tecnología rival puede coexistir, cuando en realidad esta coexistencia sí es posible, aunque con cuotas de mercado muy distintas. En cualquier caso, en presencia de Externalidades de Red, y especialmente si existe incompatibilidad entre tecnologías, la situación natural es la existencia de cuotas de mercado muy distintas sin que para ello sea preciso incurrir en prácticas ilegales (ECONOMIDES, 2000).

FIGURA 2.4

REALIMENTACIÓN POSITIVA EN LOS MERCADOS DE REDES



Fuente: Elaboración propia.

Pero esto no implica que la competencia sea escasa, sino todo lo contrario: la competencia hasta que una compañía logre establecer su tecnología como dominante puede ser muy intensa (ECONOMIDES, 2001). De hecho una de las peculiaridades de los mercados en que aparecen este tipo de efectos es que no resulta extraño que una determinada tecnología sea superada por otra técnicamente inferior, como por ejemplo en el caso de los vídeos VHS y Betamax (MCGEE y SAMMUT, 2002), ya que existen factores, como las expectativas generadas y la existencia de productos complementarios, que condicionan sustancialmente las probabilidades de éxito.

Sin embargo, aunque las empresas favorecidas por la presencia de fuertes Externalidades de Red obtengan unos mayores beneficios, esto no implica necesariamente la aparición de un monopolio. Por ejemplo, en el caso de Microsoft, su posición en el mercado obedece tanto a la presencia de Externalidades de Red y a la existencia de economías de escala, como al empleo de determinadas estrategias comerciales como el *vaporware*⁷ (KHAN *et al.*, 2004), que consiste en el preanuncio de un

⁷ Como afirman BALCER y LIPPMAN (1984) el preanuncio de una nueva tecnología retrasa la adopción de la mejor tecnología disponible en la actualidad. Por otra parte Microsoft, además del «vaporware» también ha aplicado con notable éxito otro tipo de estrategias comerciales,

determinado producto a fin de modificar las expectativas de los consumidores (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 14). En este mismo sentido, eBay aprovechó el haber sido la primera empresa en ofrecer subastas on-line para diferenciarse mediante la creación de Externalidades de Red, lo que combinado con la obtención de economías de escala y alcance les proporcionó una ventaja significativa respecto a sus competidores (SIEBER, 2002. Citado en CASSIMAN y SIEBER, 2002).

E incluso existiendo Externalidades de Red y economías de escala, la heterogeneidad en las preferencias de los consumidores, esto es, su valoración de las distintas tecnologías, así como la diferenciación de productos pueden hacer que varias redes coexistan de forma simultánea. Y es que determinados usuarios pueden preferir las ventajas intrínsecas de un producto aunque esto implique pertenecer a una red de menor tamaño. El caso de las computadoras Apple es un buen ejemplo de este tipo de situaciones (VAN HOVE, 1999).

También es preciso aclarar que hasta que no se alcanza la denominada masa crítica de usuarios (OREN *et al.*, 1982; OREN y SMITH, 1982), no se inicia el proceso de adopción masiva como consecuencia de las Externalidades de Red, de modo que el éxito de una tecnología que compita en este tipo de mercados estará fuertemente condicionado por su capacidad de alcanzar dicha masa crítica, como se estudiará más adelante. El hecho de que Sun Microsystems decidiese regalar su sistema operativo Solaris (*Expansión*, 19/11/04) puede obedecer precisamente a su necesidad de alcanzar una base de usuarios suficientemente grande como para poder competir en el mercado de los Sistemas Operativos, ya que este mercado se caracteriza precisamente por una fuerte presencia de Efectos de Red (LÓPEZ SÁNCHEZ y PÉREZ PRADO, 2004).

En cualquier caso, y pese a todos los matices que se acaban de indicar, lo cierto es que en presencia de Efectos de Red la situación natural es la existencia de cuotas de mercado muy distintas, y la máxima *the winner takes most* es cierta en la mayoría de los casos. Y el hecho de que las Externalidades de Red lleven en ocasiones a una situación en la que una única tecnología sea adoptada tiene, sin duda, algunos inconvenientes (ZODROW, 2003; BRYNJOLFSSON y KEMERER, 1996; FARRELL y SALONER, 1992):

siendo quizá una de las más relevantes el denominado *bundling* (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 70-74). Éste consiste en ofrecer dos o más productos en un paquete a un precio determinado, que habitualmente es menor que la suma de los precios de sus componentes. Además de las ventajas para el consumidor (adquirir una serie de productos garantizados para funcionar bien juntos y a un precio inferior al que pagaría individualmente por cada uno de ellos), el productor también puede beneficiarse considerablemente del empleo de este tipo de técnicas (BRYNJOLFSSON y BAKOS, 2000 y 1999).

- **Reducción de la variedad o diversidad.** Por ejemplo la competencia entre los vídeos VHS y Beta hizo desaparecer estos últimos, de modo que quienes quisiesen disponer de un reproductor de vídeo doméstico debían adquirir uno con el estándar VHS, sin tener ninguna otra opción disponible.

- **Posible pérdida de eficiencia como consecuencia de la elección de un estándar que no sea el más adecuado**⁸. Puesto que una vez iniciado el proceso de realimentación positiva resulta complicado, costoso y lento sustituir una tecnología ya instalada por otra, puede pasar mucho tiempo hasta que se logra sustituir un estándar por otro mejor⁹.

En este sentido LIEBOWITZ y MARGOLIS identificaron tres tipos de dependencia a las condiciones iniciales (*path dependence*)¹⁰, indicando que sólo una de ellas (la que denominan «de tercer grado») implica ineficiencia. Pese a la opinión de estos autores, que afirman que la dependencia de las condiciones iniciales de tercer grado es un fenómeno muy extraño incluso en la Economía Digital (haciendo referencia a las Externalidades de Red), la literatura sugiere numerosos ejemplos de tecnologías sujetas a Efectos de Red que han derrotado a otras tecnológicamente superiores debido precisamente a una mayor aceptación inicial que desencadenó la realimentación positiva. Es decir, pequeñas diferencias en las cuotas de mercado iniciales pueden suponer una gran diferencia en la evolución del mercado¹¹ (SCHILLING, 2002 y 1998; WADE, 1995; ARTHUR, 1989 y 1990).

⁸ Sin embargo, esta adopción ineficiente no aparece únicamente en mercados de redes. SUÁREZ y UTTERBACK (1995) y UTTERBACK (1996), al hablar de la aparición de un diseño dominante en una industria (aparición cuyas causas podían ser diversas, incluyendo los efectos de red), apuntaban la posibilidad de que este diseño dominante no fuese el más adecuado tecnológicamente.

⁹ Existe sin embargo una cierta polémica con respecto a si realmente siempre aparece un exceso de inercia (*excess inertia*) que favorece a las tecnologías ya instaladas, de modo que resulta difícil sustituirlas por otras nuevas y superiores que adolecen de una menor base de usuarios. KATZ y SHAPIRO (1992) analizaron una serie de situaciones en las que no se produce este exceso de inercia, sino que por el contrario una nueva tecnología puede hacerse con la totalidad del mercado pese a que esto no constituya la mejor opción desde el punto de vista social, y denominaron a este efecto, contrario al exceso de inercia, fricción insuficiente (*insufficient friction*). Anteriormente FARRELL y SALONER (1985) estudiaron el problema llegando a la conclusión de que el exceso de inercia puede producirse en aquellos casos en los que la información no es perfecta, de modo que en estas situaciones es posible que una nueva tecnología superior no sea capaz de sustituir a otra ya instalada. Sin embargo, con información completa el exceso de inercia no tiene por qué aparecer. Estos mismos autores (FARRELL y SALONER, 1986) también estudiaron el problema de la adopción ineficiente de una nueva tecnología incompatible (en este caso empleando el término *excess momentum*), y analizaron cómo los preanuncios y las bajadas de precios pueden evitar este tipo de entradas en el mercado.

¹⁰ Para ampliar información al respecto puede consultarse LIEBOWITZ y MARGOLIS (1995b). En dicho trabajo se detallan los tres tipos de dependencia a las condiciones iniciales mencionadas.

¹¹ Como se estudiará en el capítulo dedicado a los sistemas dinámicos, la dependencia de las condiciones iniciales es precisamente una de las características de los sistemas caóticos. Ciertamente en presencia de fuertes Efectos de Red puede darse el llamado «efecto mariposa» (FARRELL y KLEMPERER, 2004), que se estudiará en el capítulo dedicado a los Sistemas Dinámicos. En este sentido resulta muy interesante la afirmación de SCHILLING (2002): «Hay un conjunto de factores

En relación con esta idea de *path dependence* surge el concepto de *Lock-in*, que aparece cuando un usuario o grupo de usuarios quedan vinculados a una tecnología. La existencia de fuertes Efectos de Red combinada con unos elevados costes de cambio puede generar este *Lock-in*. En este sentido FARRELL y SHAPIRO (1988) afirman que la existencia de costes de cambio no supone por sí misma una barrera de entrada, puesto que pese a la mayor dificultad de entrada puede animar a nuevos competidores para hacerse con los usuarios no conectados a la red existente. Sin embargo la combinación de costes de cambio y Externalidades de Red (o economías de escala) sí puede generar una barrera de entrada.

- En determinados casos puede producirse una **congestión de la red**, como ocurre en el caso de Internet, apareciendo de este modo una fuerza de sentido contrario a las Externalidades de Red y que limita su crecimiento. En ocasiones se denomina a este tipo de efectos, que surgen como consecuencia del empleo de recursos compartidos, externalidades de congestión. De hecho algunos autores (SOHN *et al.*, 2002; GUPTA, *et al.*, 2000. GUPTA *et al.*, 1999b. WESTLAND, 1992) han estudiado la necesidad de introducir una adecuada política de precios por el uso de las redes de comunicación (p.e. Internet) para evitar precisamente dichos problemas.

4. TIPOS DE EXTERNALIDADES DE RED

Los beneficios externos generados por un usuario al conectarse a una red pueden estar causados por varios factores, siendo los más relevantes los que se detallan a continuación (ver por ejemplo CLEMENTS y OHASHI, 2004; ZODROW, 2003; AMIT y ZOTT, 2001; GOOLSBEE y ZITTRAIN, 1999; KEILBACH y POSCH, 1998; YOFFIE, 1996; KATZ y SHAPIRO, 1985):

- **Externalidades de red directas.** Se producen cuando el valor de conectarse a una red se incrementa con el número de puntos de comunicación, por lo que la clave es precisamente el incremento de la capacidad de comunicarse con otros usuarios. Por ejemplo, la utilidad para un consumidor de adquirir un teléfono depende del número de teléfonos ya instalados con los que pueda establecer comunicación. Análogamente emplear un procesador de textos ampliamente extendido garantiza que cualquier documento elaborado con el mismo podrá ser leído por un gran número de individuos. Otro ejemplo paradigmático de la importancia de este tipo de Externalidades la encontramos en portales

que tienen una importante influencia en la adopción tecnológica a pesar de los efectos aleatorios. Esto indica que incluso cuando el proceso está caracterizado por la dependencia de las condiciones iniciales y es aparentemente caótico, es posible modelizarlo». Ésta es precisamente la idea de este trabajo: tratar de modelizar sistemas aparentemente caóticos (extremadamente sensibles a las condiciones iniciales).

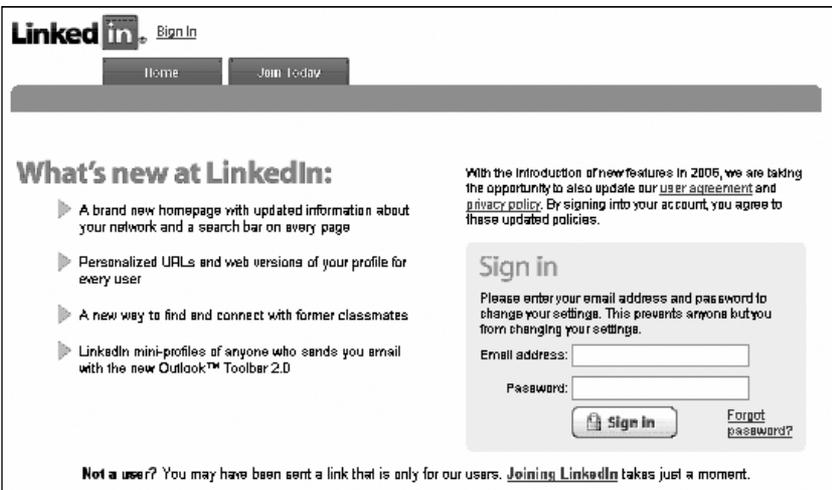
como neurona.com (figura 2.5) o linkedin.com (figura 2.6). Dichos portales, enfocados al networking profesional, resultan tanto más atractivos cuanto mayor sea el número de usuarios que pertenecen a los mismos.

FIGURA 2.5
HOME DE NEURONA.COM



Fuente: www.neurona.com.

FIGURA 2.6
HOME DE LINKEDIN.COM



Fuente: www.linkedin.com.

- **Externalidades de red indirectas**, debidas a los mecanismos estándar de mercado. Al incrementarse el número de usuarios de una red se producirá una bajada de precios en los productos (economías de escala), al tiempo que se incrementará la variedad de productos complementarios y su facilidad de compra, con lo que los potenciales clientes se verán beneficiados. Para un comprador de hardware, por ejemplo, el número de otros compradores de un hardware similar resulta un factor importante porque la cantidad y variedad de software compatible será una función creciente con el número de usuarios. BASU *et al.*, (2003), en su estudio sobre los CDs, probaron que existe dicha relación entre la decisión de compra de los usuarios y la variedad y precio de los productos complementarios ¹².

- **Externalidades de red de aprendizaje**. Al aumentar el tamaño de la red se incrementará el número de usuarios con conocimientos específicos sobre la tecnología asociada. Estos «expertos», poniendo a disposición de otros usuarios sus conocimientos, favorecen la expansión de la red, de modo que un usuario logrará un mejor servicio post venta además del consejo de otros usuarios experimentados. Por otra parte, quienes ya conocen la tecnología, incurrirían en un coste de aprendizaje en caso de querer adoptar otra distinta. Existen numerosos ejemplos de este efecto en la literatura, como el caso de las máquinas de escribir QWERTY discutido por DAVID (1985) o el trabajo empírico de GOOLS-BEE y KLENOW (2002) sobre la difusión de ordenadores en Estados Unidos, que demostró que existía una probabilidad de compra del primer ordenador mucho mayor en ciudades con un elevado número de usuarios de ordenadores, hecho que atribuyeron a las Externalidades de aprendizaje. Sin embargo es preciso aclarar que aunque las Externalidades de Red de aprendizaje aparecen mencionadas en muchas investigaciones, determinados autores consideran únicamente dos tipos de Externalidades de Red: las directas, situadas en el lado de la demanda, y las indirectas, situadas en el lado de la oferta.

Aunque en determinados productos no tienen por qué darse simultáneamente los tres tipos de Externalidades, es posible que esto suceda. Veámoslo con un ejemplo. Los teclados de ordenador QWERTY que empleamos en la actualidad, mantienen una configuración que proviene de las antiguas máquinas de escribir. Sin embargo existen configuraciones alternativas (como la DVORAK) que según algunos especialistas permiten un mecanografiado más rápido. ¿Por qué se sigue

¹² Sin embargo en este caso los autores matizan que el incremento de utilidad derivado de una mayor disponibilidad de complementarios no afecta al producto (en este caso reproductor de CDs) en su totalidad: algunas funcionalidades del producto (las denominadas *externality-sensitive attributes*) sufrirán un incremento de utilidad mayor que otras.

empleando entonces el estándar QWERTY? Principalmente debido a tres factores:

- Ante la disyuntiva de aprender mecanografía, un individuo elegirá sin duda aquel estándar que esté más difundido, ya que esto le permitirá trabajar sin problemas con la mayoría de los teclados. Por ejemplo, un administrativo al incorporarse a una empresa debe usar el teclado de que dispone la organización (que sin duda será QWERTY), por lo que de nada le habrá servido aprender mecanografía en un DVORAK. Son los Efectos de Red directos.

- Alguien que desee adquirir un teclado DVORAK puede encontrar dificultades debido a los Efectos de Red indirectos: los teclados QWERTY están ampliamente disponibles en el mercado puesto que son los más empleados, mientras que los DVORAK son bastante más difíciles de conseguir.

- La mayoría de la formación relacionada con la mecanografía (academias, cursos de Internet, etc.) está basada en el estándar QWERTY. Los Efectos de Red de aprendizaje juegan a favor de dicho estándar.

5. CONCLUSIONES

Hay tres ideas que merece la pena destacar de este capítulo:

- Los Efectos o Externalidades de Red hacen que el valor de un producto o servicio para un usuario dependa no sólo del bien en sí mismo, sino del número de usuarios que utilicen dicho producto o servicio. Esto tiene importantes consecuencias en la dinámica competitiva de los mercados, ya que se induce un proceso de realimentación positiva que hace a las tecnologías fuertes cada vez más fuertes, y a las débiles cada vez más débiles, por lo que en muchos casos el equilibrio final es aquél en el que existe una gran desigualdad de las cuotas de mercado de las tecnologías rivales.

- Aunque las Externalidades de Red no son exclusivas de la Economía Digital, su presencia en la misma es considerable, y en la mayoría de los mercados relacionados con la TIC se dan en una u otra forma.

- Podemos identificar tres tipos distintos de Efectos de Red: directos (derivados de las posibilidades de comunicación entre usuarios), indirectos (debidos al aumento de productos complementarios) y de aprendizaje (consecuencia de las mayores posibilidades de consultar con usuarios experimentados).

CAPÍTULO III

EXTERNALIDADES DE RED: CONCEPTOS AVANZADOS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presentan una serie de conceptos más avanzados sobre los mercados de redes: desde la denominada «ley de Metcalfe» hasta la curva de demanda y evolución temporal de una tecnología en presencia de Efectos de Red. Se estudian también los principales factores que determinan el éxito de un producto en este tipo de mercados y las distintas estrategias que una organización puede adoptar en función de dichos factores.

1. INTRODUCCIÓN

Ya sabemos que, en este tipo de mercados, el valor de una red crece con cada nuevo individuo que se incorpora a la misma. Esto implica que cada usuario adicional aporta valor al resto, pero ¿cuánto valor aporta? Éste es uno de los temas aún no resueltos en el estudio de los mercados de redes, y en este capítulo se planteará una introducción al problema, analizando la llamada «Ley de Metcalfe». También estudiaremos la curva de demanda y la evolución temporal de los productos de red, introduciendo un concepto de gran relevancia en este tipo de mercados: la llamada masa crítica. Además trataremos los diferentes componentes de que consta la función de utilidad de un producto de red (valor intrínseco y de sincronización), y sus implicaciones en la forma de la curva de demanda.

Todas estas ideas resultan algo más complejas que las que se trataron en el anterior capítulo, y en algunos casos requieren de ciertos cálculos, pero se trata de conceptos de gran relevancia para comprender en profundidad la naturaleza de los mercados de redes. Aun así no entraremos a realizar un análisis detallado ni demasiado cuantitativo, ya que el lector interesado en ello puede recurrir a la bibliografía que se menciona a lo largo de todo el capítulo, sino que se tratará de plantear cada una de estas ideas de la forma más directa posible.

Al final de esta sección se han incluido dos apartados, más enfocados a la Dirección de Empresas, en los que se habla de factores claves para el éxito y estrategias competitivas que las organizaciones pueden desarrollar. Se trata de aspectos que están mucho menos desarrollados en la literatura existente, pero que merece la pena tratar debido a su aplicación directa a la realidad empresarial.

2. LA LEY DE METCALFE

La conocida como Ley de Metcalfe (ver SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 175), definida por Bob METCALFE, el inventor de *Ethernet* (estándar para hardware, cableado y comunicación de redes de área local), es la ley que subyace a las Externalidades de Red. De hecho no se puede hablar de Ley como tal, ya que se trata más bien de una regla que no ha sido demostrada, pero que desde luego tiene una gran relevancia en la comprensión del fenómeno objeto de estudio.

La Ley de Metcalfe propone que si hay n personas en una red, el valor para cada una de ellas es proporcional al número del resto de usuarios, $n - 1$, de modo que el valor total de la red es proporcional al número total de usuarios multiplicado por el valor de la red para cada uno de ellos, esto es, $n \cdot (n - 1)$. Es decir:

$$\begin{aligned} VALOR_{\text{usuario } n\text{-ésimo}} &\propto n - 1 \\ VALOR_{\text{Total}} &\propto n \cdot (n - 1) \end{aligned}$$

El atractivo de esta ley radica principalmente en su sencillez, tanto por el hecho de que surge de forma natural, como por ser muy fácilmente expresable en términos matemáticos. No obstante, un estudio cuidadoso de sus implicaciones conduce necesariamente a proponer ciertas matizaciones, ya que si bien puede resultar válida como primera aproximación, desde luego no refleja la naturaleza de redes complejas y evolucionadas¹.

¹ Lo mismo podría decirse de la Ley de Reed, que propone lo siguiente: si hay n usuarios en una red, puesto que éstos pueden formar 2^n grupos, el valor de la red crece como 2^n .

Un análisis detallado revela que la ley de creación de valor debe cumplir al menos tres requisitos para ser válida. Veamos cuáles son esas condiciones.

Condición 1: La ley debe presentar, hasta que aparezcan externalidades de congestión, unos rendimientos marginales positivos y decrecientes.

Como señalan ODLYZKO y TILLY (2005), el principal problema de la Ley de Metcalfe es asumir que todas las conexiones son igualmente valiosas. Efectivamente esta Ley propone que el valor marginal aportado por un usuario al resto permanece constante e igual a la constante de proporcionalidad elegida, k . El usuario n -ésimo aporta un valor al resto de usuarios que resulta de la diferencia $k \cdot (n - 1) - k \cdot (n - 2)$, es decir, precisamente k . El usuario m -ésimo, siendo $m > n$, aporta exactamente el mismo valor, lo que se comprueba fácilmente calculando la diferencia $k \cdot (m - 1) - k \cdot (m - 2)$. Esta hipótesis resulta desde luego cuestionable por varios motivos:

- **El perfil de los usuarios que se conectan a lo largo del tiempo no tiene por qué ser el mismo**, de modo que el valor que aporten al resto de usuarios con su conexión tampoco ha de serlo (ZODROW, 2003). Si, por ejemplo, un grupo de empresas de un determinado sector adopta como estándar un determinado procesador de textos, la posibilidad de intercambiar documentos entre ellas constituirá una importante fuente de valor, que se incrementará sustancialmente con cada nueva compañía incorporada a la red. Si a continuación empresas de otro sector, con el que apenas existe relación, adoptan esa misma tecnología, el valor que esta incorporación aporta a las empresas iniciales será sin duda mucho menor.

- Al pasar de n usuarios a $n + 1$, el número de posibles conexiones se incrementa en $2 \cdot n$, ya que en el primer caso pueden establecerse $n \cdot (n - 1)$ conexiones y en el segundo $(n + 1) \cdot n$. Para un usuario concreto, sin embargo, el número de posibles conexiones sólo se incrementa en 1, es decir, que el número de conexiones posibles que puede realizar un usuario con una red de tamaño n es de $n - 1$. El problema surge **para valores grandes de n** , ya que **no tiene sentido afirmar que un usuario concreto vaya a ser físicamente capaz de realizar todas esas conexiones**. Si la red consta de 100 usuarios, la incorporación de uno más supone un aumento relevante para un individuo ya conectado, pero si la red consta de 10 millones de usuarios, la incorporación de uno nuevo apenas si resulta importante para dicho individuo, ya que probablemente ni siquiera tenga la oportunidad de establecer relación alguna con este último usuario conectado. Por tanto el valor que aporta no puede ser idéntico al de los pioneros.

• **No todas las conexiones van a ser usadas con la misma intensidad**, lo que está muy relacionado con los dos puntos anteriores.

Condición 2: La ley debe permitir, a partir de cierto valor, rendimientos marginales negativos, de modo que se recoja el efecto de las externalidades de congestión.

Como señala **Zodrow** (2003), a partir de un cierto número de usuarios las externalidades de congestión ya mencionadas pueden hacer que el valor de un nuevo usuario no sólo no sea igual al valor aportado por los primeros participantes, sino que sea negativo, ya que dificulta al resto de usuarios sus actividades con los recursos compartidos.

ODLYZKO y **TILLY** (2005) propusieron una ley alternativa a la de **METCALFE** que, aunque solucionaba el problema de los rendimientos marginales decrecientes, no verificaba esta segunda condición. De acuerdo a estos autores el valor para cada usuario de una red crece según $\text{Log}(n)$, lo que implica que el valor total de la red es proporcional a $n\text{Log}(n)$. El problema de este planteamiento es que los rendimientos marginales siempre son positivos, de modo que nunca aparecerían externalidades de congestión.

Condición 3: La interconexión entre redes de diferente tamaño añade más valor a la más pequeña.

Como señalan **ODLYZKO** y **TILLY** (2005), en los mercados reales las redes de mayor tamaño suelen exigir una compensación económica a las más pequeñas a cambio de la conexión. Esto no puede ser explicado por la Ley de Metcalfe, ya que dicha ley implica que ambas redes incrementarían su valor exactamente en la misma cantidad. En efecto, supongamos que existen dos redes, A con n usuarios, y B con m usuarios (Siendo $n > m$). De acuerdo a la Ley de Metcalfe, con la fusión de ambas redes, cada usuario de A ve incrementado su valor de forma proporcional a m (el número de nuevas conexiones), por lo que la red A incrementa su valor proporcionalmente a nm . Por otra parte, cada usuario de B ve incrementado su valor de forma proporcional a n , por lo que la red B incrementa su valor proporcionalmente a mn . En resumen, de acuerdo a la Ley de Metcalfe, A y B incrementan su valor exactamente en la misma cantidad, por lo que no tendría sentido exigir ningún tipo de compensación económica por la interconexión. Por tanto dicha ley no es capaz de explicar lo que ocurre en mercados reales.

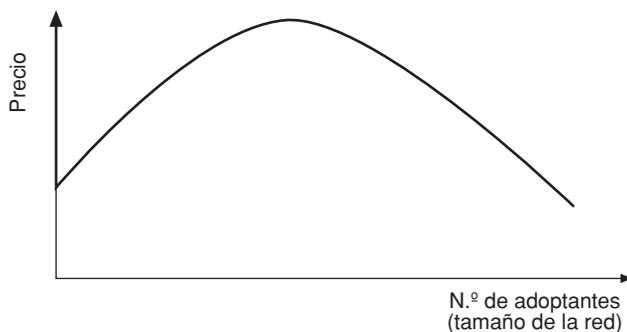
Algunos de estos tres requerimientos ya han sido planteados por investigadores como **KRUGMAN** o **DELONG** (ver **ANGELELLI et al.**, 2000), **Odlyzko** y **Tilly** (2005), **Odlyzko** (2000), etc., aunque no existe en realidad ninguna propuesta totalmente aceptada que verifique todas las condiciones indicadas. Se trata de una línea de investigación que continúa

abierta, pero al menos conocemos cuáles son las tres condiciones básicas que ha de cumplir una ley de creación de valor en mercados de redes.

3. LA CURVA DE DEMANDA DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED

Otra de las peculiaridades de los mercados sujetos a Efectos de Red es la forma de la curva de demanda (ver por ejemplo PINDYCK y RUBINFELD, 2001). Frente a la forma que presentan los productos más convencionales, aquellos que están sujetos a Efectos de Red presentan una forma como la que se indica en la figura 3.1. Existe un primer tramo creciente que refleja el mayor valor de la red a medida que se incrementa su tamaño, pero a partir de cierto punto se produce una caída como consecuencia de que aquellos usuarios que se van incorporando aportan un menor valor (MCGEE y SAMMUT, 2002; ANGELELLI *et al.*, 2000), que puede incluso ser negativo, tal y como se discutió al estudiar la Ley de Metcalfe.

FIGURA 3.1
CURVA DE DEMANDA
DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED



Fuente: MCGEE y SAMMUT (2002).

La construcción teórica de la curva de demanda, siguiendo a ECONOMIDES y HIMMELBERG (1995a y 1995b), puede plantearse del siguiente modo:

- La demanda agregada, n , será función tanto del precio, p , del producto como de la base instalada de clientes, n^e . Es decir $n = f(n^e, p)$.
- Invertiendo esta ecuación es posible expresar el precio que un consumidor está dispuesto a pagar dado el número de demandantes, y el tamaño de la red: $p = p(n, n^e)$.

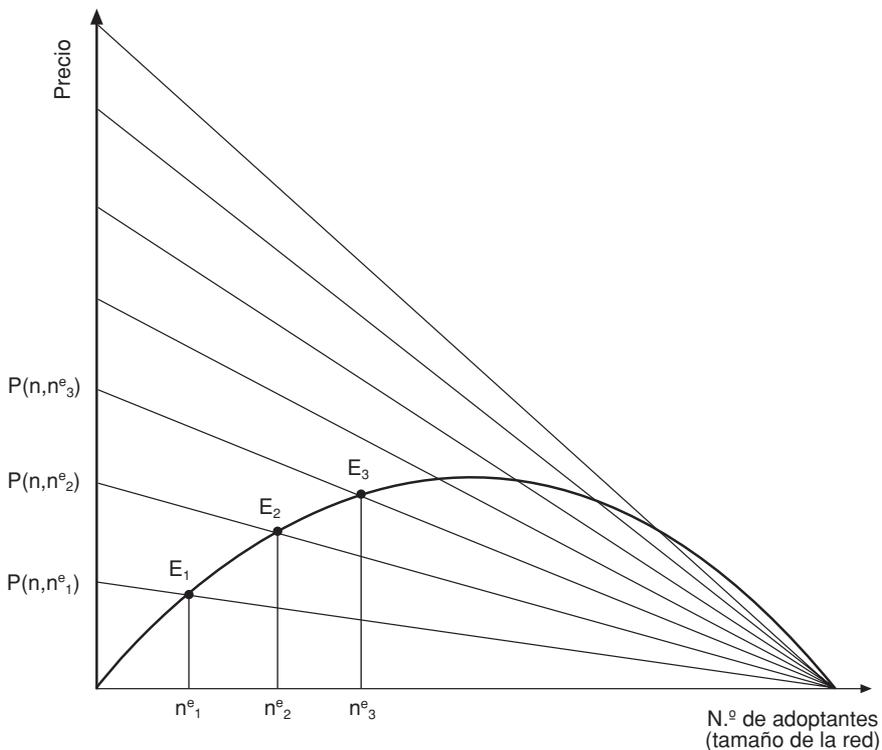
- A continuación se representan gráficamente estas curvas para distintos tamaños de la red (llamemos a cada uno de estos tamaños n^e_i).
- Calculando la intersección de cada curva $p = p(n, n^e_i)$ con la base instalada n^e_i se obtiene una secuencia de puntos que corresponde precisamente a la curva de demanda.

La figura 3.2 muestra gráficamente este procedimiento para un producto de red puro. Es preciso destacar que el eje vertical también forma parte de la curva de demanda.

Es posible identificar diferentes formas de la curva de demanda (MCGEE y SAMMUT, 2002; ECONOMIDES y HIMMELBERG, 1995a) en función de tres variables distintas:

- **Valor intrínseco del producto.** Es el valor que aporta a un usuario el bien en sí mismo. Un teléfono aporta un valor intrínseco nulo,

FIGURA 3.2
CONSTRUCCIÓN DE LA CURVA DE DEMANDA
DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED



Fuente: ECONOMIDES y HIMMELBERG (1995a).

puesto que su tenencia no reporta ningún beneficio a menos que se pueda establecer conexión con otros teléfonos. Un procesador de texto por el contrario sí tiene un alto valor intrínseco, ya que facilita la redacción de documentos con independencia de la posibilidad de compartírselos con otros usuarios. Este valor intrínseco es por tanto el valor del producto para un tamaño de la red igual a cero, y en el caso de ser cero (como los teléfonos) se habla de un producto de red puro.

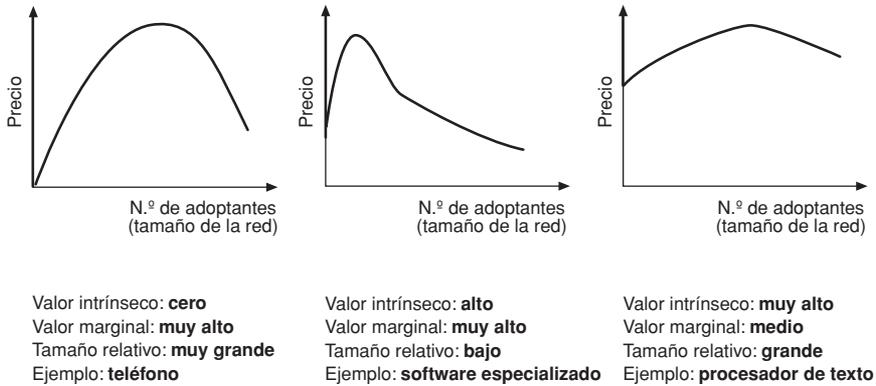
- **Valor marginal o de sincronización.** Es el valor que genera en un usuario la incorporación de otros a la red. En el caso de los teléfonos será muy elevado mientras que en los procesadores de texto será algo más reducido, ya que si bien en estos últimos la posibilidad de compartir documentos en formato electrónico es muy importante, siempre existe la posibilidad, por ejemplo, de distribuirlos impresos. Los modelos habitualmente formalizan estas dos variables haciendo que la utilidad de un producto tenga la siguiente forma (KAUFFMAN *et al.*, 2000; VAN HOVE, 1999): $U = a + b(n^e)$. El primer término, a , representa el valor intrínseco, y por tanto será cero para bienes de red puros. El segundo término, $b(n^e)$, es una función dependiente del tamaño de la red, n^e , y recoge la idea de valor marginal². Obviamente $b(0)$ ha de ser igual a 0.

- **Tamaño de la red respecto al tamaño del mercado.** Viene determinado por el grupo de usuarios que pueden emplear el producto. Un software de uso específico generará una red de tamaño reducido, puesto que sólo un grupo pequeño de individuos necesitará utilizarlo. En este caso pueden coexistir diferentes redes en competencia. El teléfono por el contrario generará una red de gran tamaño debido a que la mayor parte de la población deseará hacerse con uno, quedando muy poco espacio para la aparición de tecnologías rivales.

La figura 3.3 muestra las tres configuraciones posibles, y aunque en todos los casos la forma es de «U» invertida, existen diferencias respecto a la ordenada en el origen (determinada por el valor intrínseco), pendiente (determinada por el valor marginal) y máximo de la curva, que indica el tamaño mínimo distinto de cero de la red para el que puede permanecer en equilibrio (ECONOMIDES y HIMMELBERG, 1995a y 1995b).

² YANG y BARRET (2002) sin embargo proponen que la función $b(n^e)$ puede ser globalmente no cóncava ni monótona. Su idea es que, si se considera el incremento de utilidad como la suma del efecto esnob (cuantos menos usuarios, mayor utilidad) y el efecto red, la función adoptará una forma en la que existe un pequeño primer tramo convexo (domina el efecto *esnob*) que pasa a ser cóncavo superado cierto umbral (domina el efecto red). Esta función de utilidad da lugar a un punto de equilibrio estable adicional respecto al modelo habitual: permite la existencia de redes de tamaño pequeño.

FIGURA 3.3
DIFERENTES CURVAS DE DEMANDA
DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED



Fuente: MCGEE y SAMMUT (2002).

A) El concepto de masa crítica de usuarios

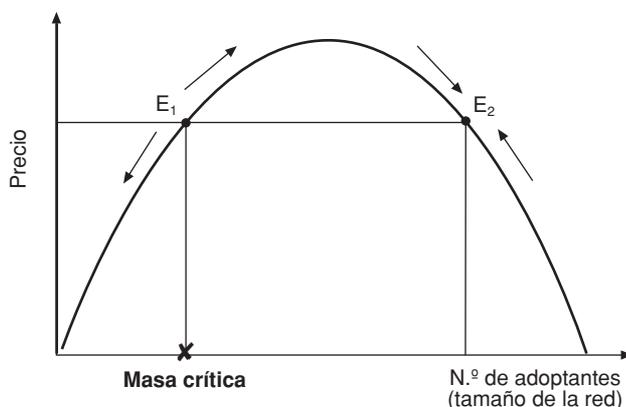
Una idea clave relacionada con la curva de demanda es el concepto de masa crítica de usuarios. OREN *et al.*, (1982)³ la definieron como el tamaño mínimo de la red para que a los potenciales usuarios les compense incorporarse a la misma, es decir, el tamaño mínimo requerido para iniciar la realimentación positiva y que el proceso por tanto se automantenga (SEVCIK, 2004; URE, 2002). En términos de la curva de demanda la explicación es sencilla. Como se muestra en la figura 3.4, para un precio dado existen dos posibles cantidades de equilibrio: la situada a la izquierda es un equilibrio inestable y representa precisamente la masa crítica, mientras que la de la derecha es un equilibrio estable (OREN y DHEBAR, 1985; ECONOMIDES y HIMMELBERG, 1995a y 1995b). Para tamaños inferiores a la masa crítica, dado que la curva de demanda permanece por debajo del precio, los potenciales usuarios no están interesados en incorporarse a la red, e incluso los usuarios que ya se han incorporado tenderán a abandonarla, de modo que la tecnología puede fracasar. Una vez superado este punto, al permanecer la curva de demanda por encima del precio, la red se irá expandiendo hasta alcanzar su tamaño de equilibrio.

Sin embargo es importante distinguir esta masa crítica del concepto de masa crítica en el sentido usado por algunos autores (por ejemplo ECO-

³ Aunque este trabajo, junto con el de OREN y SMITH (1982), se identifica en muchos casos como uno de los primeros en caracterizar la masa crítica, realmente existen trabajos previos como el de ROHLFS (1974), quizá menos conocidos, en los que ya se introdujo este concepto.

NOMIDES y HIMMELBERG, 1995a y 1995b; YANG, 1997). ECONOMIDES y HIMMELBERG en especial emplean en todos sus trabajos el término de masa crítica para hacer referencia al mínimo tamaño de equilibrio que puede existir en un mercado con Efectos de Red, y que coincide por tanto con el máximo de la curva de demanda. Obviamente aunque se trate de ideas relacionadas, no son exactamente lo mismo. A lo largo de todo el libro se hablará de masa crítica haciendo referencia al primer concepto: tamaño mínimo de la red requerido para iniciar la realimentación positiva.

FIGURA 3.4
MASA CRÍTICA DE USUARIOS

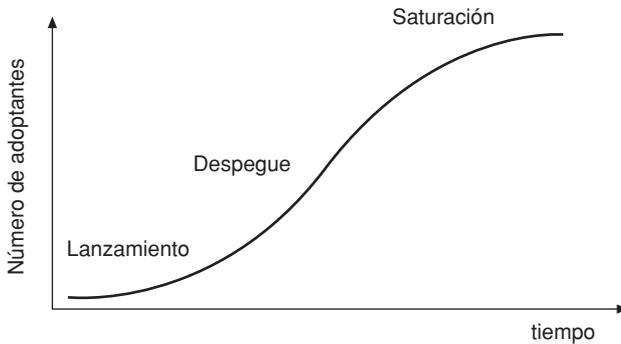


Fuente: ROHLFS (1974).

4. EVOLUCIÓN TEMPORAL DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED

Los sistemas sujetos a realimentación positiva suelen seguir una evolución temporal en forma sigmoïdal (ver por ejemplo PÉREZ PRADO y PASSÁS OGALLAR, 2004; ECONOMIDES, 2003; SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 170; LOCH y HUBERMAN, 1999). Esto implica que los modelos de difusión de tecnologías que pueden representar el comportamiento de una tecnología sujeta a Efectos de Red deben exhibir precisamente esta forma en «s» característica (figura 3.5). Como se analizará en detalle en el capítulo V, la mayor parte de dichos modelos se caracterizan principalmente por una evolución de este tipo, ya que aunque existen algunas propuestas que sugieren un comportamiento diferente (como por ejemplo el modelo exponencial) su ámbito de aplicación es más restringido, y en la mayoría de los casos no refleja adecuadamente el comportamiento de las tecnologías en las que aparecen Efectos de Red.

FIGURA 3.5
DIFUSIÓN DE UNA TECNOLOGÍA
SUJETA A REALIMENTACIÓN POSITIVA



Fuente: SHAPIRO y VARIAN (1999a: 170).

No se entrará en este momento a estudiar en detalle las características de este tipo de evolución temporal, ya que esto se hará más adelante en el capítulo V. Sin embargo hay algunos aspectos que sí merecen ser comentados. Como ya se ha indicado, la curva de crecimiento sigue un patrón sigmoide, que es común a muchas otras industrias, pero que en este caso presenta diferencias sustanciales en la duración de cada fase debido al efecto de la realimentación positiva. En general es posible identificar varias etapas:

- En una primera fase el crecimiento es bastante lento y la cuota de mercado queda representada por una curva prácticamente plana. De hecho esta etapa suele presentar una duración mayor que en otro tipo de mercados debido a lo que se denomina «efecto pingüino». Los pingüinos necesitan introducirse en el mar para cazar, pero los depredadores que acechan suelen atacar a aquellos que primero alcanzan el agua. Por tanto cada miembro del grupo espera a que sea otro el que se lance primero. En mercados de redes, muchos usuarios se muestran temerosos de que una elección incorrecta les lleve a adquirir un estándar que no sea el que finalmente prospere, por lo que prefieren esperar a ver cómo evoluciona cada tecnología antes de adquirir el producto.
- En una segunda fase, se produce un crecimiento brusco en el momento en el que la red alcanza su masa crítica, de modo que se produce un crecimiento explosivo del número de usuarios, con una tasa de crecimiento mayor que en mercados de productos convencionales.
- En la tercera fase, el crecimiento se ralentiza y el número de usuarios se estabiliza, llegando el mercado a la madurez. Podría apreciarse

una cuarta fase, que estaría representada por una fuerte caída, ante la aparición y crecimiento brusco de una tecnología superior a la primera, es decir, ante un proceso de sustitución tecnológica.

Si analizamos la gráfica de crecimiento de los aparatos de fax, TV o teléfonos móviles, podremos distinguir claramente las fases anteriormente mencionadas. Es importante insistir en que, si bien es cierto que a partir del momento en que se alcanza la masa crítica la adopción es mucho más rápida que en aquellas tecnologías en las que no aparecen Efectos de Red, hasta alcanzar este punto el crecimiento será más lento por lo que la fase de lanzamiento tendrá una duración mayor (GOLDENBERG *et al.*, 2004).

Por otra parte, aunque la evolución temporal sea de tipo sigmoideal, pueden existir numerosas variantes en función de la velocidad de crecimiento en cada una de las etapas consideradas, y en el capítulo V se analizarán en detalle las diferentes posibilidades.

5. FACTORES DETERMINANTES DEL ÉXITO DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED

Aunque existen numerosos trabajos que analizan los factores que influyen en el proceso de difusión de tecnologías (ver por ejemplo la amplia revisión realizada por MARTÍN-CARRILLO, 2000: 19-50), en este apartado nos centraremos únicamente en aquéllos más característicos de los mercados de redes. Como se estudiará a continuación, podemos identificar tres factores clave: precio, expectativas de éxito y mercado de productos complementarios.

A) Precio

Evidentemente, este es un factor clave en el éxito de cualquier producto, y el caso de las tecnologías sujetas a Efectos de Red no es ninguna excepción. La curva de demanda analizada anteriormente muestra que menores precios implican una mayor demanda de la tecnología, ya que el equilibrio estable se alcanzará en un punto más desplazado a la derecha.

Además la existencia de una masa crítica hace necesario establecer determinadas políticas de precios que aseguren alcanzar dicho volumen de usuarios, y por tanto el precio en las primeras etapas del ciclo de vida es un factor crítico. En este sentido los trabajos de OREN y DHEBAR (1985) y XIE y SIRBU (1995) mostraron cómo un monopolista tenía fuertes incentivos para lanzar un nuevo producto a precio bajo a fin de atraer a un

número de usuarios suficientemente elevado. En el caso de un duopolio, KATZ y SHAPIRO (1986) probaron cómo la empresa con menor base de clientes debía recurrir a bajadas de precio para compensar su menor tamaño. EVANS (2003) también incide en la importancia de la estrategia de precios en industrias de plataforma multilateral⁴.

En definitiva, en la introducción de una nueva tecnología sujeta a Efectos de Red el precio juega un factor crítico, especialmente en las etapas iniciales, por lo que resulta frecuente encontrar casos de discriminación intertemporal de precios ya que esto facilita la adopción tecnológica (DHEBAR y OREN, 1986).

Por este motivo la capacidad de fabricación será un factor clave ya que unos menores costes de producción permitirán ofrecer la tecnología a un precio adecuado en cada momento captando una cuota de mercado elevada (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 259), y además unos precios bajos en la etapa inicial de una batalla de estándares envían la señal al mercado de que la empresa confía en su capacidad para lograr el éxito, aumentando por tanto las expectativas de los potenciales consumidores.

B) Expectativas de éxito

Las expectativas de éxito son sin duda un factor clave en la adopción de una tecnología sujeta a Efectos de Red, de modo que toda la literatura sobre este tema las identifica como una de las principales causas de la evolución de este tipo de mercados (entre muchos otros MCGEE y SAMMUT, 2002; YANG, 1997; ECONOMIDES, 1996a y 1996b; ECONOMIDES y HIMMELBERG, 1995a, 1995b; BESEN y FARRELL, 1994; KATZ y SHAPIRO, 1992 y 1985; BALCER y LIPPMAN, 1984). Es decir, la decisión de compra viene fuertemente condicionada por las expectativas sobre la futura evolución de la tecnología y por la consideración de si la mejor tecnología disponible en el momento actual seguirá siendo aceptable en el futuro (CHOI, 1994).

Hasta tal punto llega la importancia de este factor que ECONOMIDES (1996a y 1996b) afirma que en presencia de fuertes Efectos de Red, incluso un monopolista tendrá incentivos para invitar a entrar a otras empresas, ya que de este modo se generarán más expectativas de éxito y el tamaño de la red será mayor, lo que compensará por el incremento de competencia.

⁴ Mercados en los que hay dos o más grupos de clientes que intervienen, como por ejemplo las tarjetas de crédito (usuarios de tarjeta y comerciantes) o sistemas operativos (desarrolladores de software y usuarios).

En este mismo sentido VAN HOVE (1999) afirma que la estrategia de *first-mover*⁵ únicamente será efectiva en el caso de que se generen las suficientes expectativas de éxito, ya que en caso contrario los potenciales consumidores, temerosos de los costes de cambio asociados a una elección incorrecta, no adquirirán la tecnología y no se logrará el necesario volumen de ventas para alcanzar un lanzamiento exitoso.

La literatura identifica distintas capacidades que determinan la mayor o menor probabilidad de que un estándar logre generar las suficientes expectativas de éxito:

- **Reputación de la firma** (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 259; KATZ y SHAPIRO, 1985). Una empresa (o empresas, si el estándar está esponsorizado por varias compañías) con una reputación consolidada contará con una ventaja significativa, puesto que los potenciales consumidores pueden considerar que dicha reputación implica unas mayores garantías de éxito.

- **Base de clientes ya instalada** (MAÍCAS LÓPEZ, 2005:137; SCHILLING, 2002 y 1998; SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 258 y 1999b; BRYNJOLFSSON y KEMERER, 1996; WADE, 1995). Tener una importante base de clientes es un recurso crítico en presencia de Externalidades de Red (LIEBERMAN y MONTGOMERY, 1998), y cuanto mayor sea ésta mayores serán las probabilidades de desencadenar la realimentación positiva. Por este motivo genera importantes expectativas de éxito al tiempo que puede producir economías de escala permitiendo a la empresa disminuir sus costes.

- **Capacidad de ofrecer un producto valioso.** Se trata de una capacidad muy general en la que de hecho se englobarían varios factores. Sin ánimo de exhaustividad, puesto que no es algo únicamente característico de las tecnologías sujetas a Efectos de Red, pueden identificarse los siguientes factores:

- Capacidad de identificación de necesidades (SHY, 1996; SCHILLING, 1998). SCHILLING (2002) probó que incluso con una importante base de usuarios y productos complementarios existe riesgo de *lock-out* si no se es capaz de anticipar los requerimientos de los consumidores.

⁵ Existe cierta controversia con respecto a si una entrada temprana supone una ventaja, ya que ser el primero permite lograr el liderazgo tecnológico (AMIT y ZOTT, 2001), pero entrar después hace posible, entre otras cosas, aprovechar la experiencia del pionero (ver por ejemplo SCHILLING, 2002 y 1998). El trabajo empírico de SCHILLING (2002) aportó cierta evidencia de que existe una relación en forma de U entre el momento de entrada y la probabilidad de *lock-out*, de modo que entradas demasiado tempranas o tardías aumenta el riesgo de quedar fuera del mercado. SRINIVASAN y LILIE (2004) también llegaron a la conclusión de que los primeros entrantes tienen un mayor riesgo de quedar eliminados del mercado.

- Capacidad de innovación (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 258 y 1999b). Resulta obvio que la(s) empresa(s) que pretendan desarrollar una tecnología valiosa deben contar con las adecuadas capacidades técnicas para su diseño y fabricación.
- Servicio post venta. Se trata de una capacidad clave especialmente en las etapas iniciales del ciclo de vida, puesto que puede reducir la incertidumbre de los usuarios en lo que respecta a la utilización del producto y al respaldo de la empresa(s) que lo sponsora.
- Cualquier otra capacidad de la empresa(s) que le permiten ofrecer una tecnología valiosa desde el punto de vista de los potenciales usuarios.

• **Derechos de propiedad y capacidad de gestionar restricciones legales.** Las patentes y copyrights suponen una importante ventaja en estos mercados (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 258 y 1999b; SCHILLING, 1998), pero no lo es menos la capacidad para gestionar cualquier problema legal derivado de los derechos de propiedad. El uso de convertidores para lograr la compatibilidad entre la red vencedora y la perdedora es un ejemplo de su importancia, tanto si se mira desde la óptica de quien desea la conexión como desde la del que pretende evitarla.

• **Velocidad de reacción.** Aunque como ya se ha comentado la estrategia de *first-mover* únicamente será efectiva si va acompañada de otra serie de factores (VAN HOVE, 1999), ser capaz de actuar rápidamente constituye un factor crítico en los mercados en los que existen Efectos de Red (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 258-259).

• **Capacidad de gestionar el *lock-in* de los consumidores.** Esto implica, por una parte, evitar aquellas estrategias que puedan aumentar en los potenciales usuarios el temor a quedar atados a una tecnología, y por otra parte desarrollar estrategias que permitan afianzar a los usuarios ya existentes.

• **Capacidad de negociación para establecer alianzas estratégicas,** tanto con otras empresas rivales a fin de establecer estándares si se opta por una estrategia de apertura, como con empresas proveedoras de productos complementarios. En el caso de la fijación de estándares es obvio que la negociación resulta crítica para lograr un acuerdo sobre un estándar común que beneficie lo máximo posible a la(s) empresa(s) considerada(s). En el caso de los acuerdos con empresas proveedoras de servicios complementarios también resulta crítica esta capacidad de negociación. Si no existen productos complementarios puede ralentizarse la introducción de una nueva tecnología, pero los proveedores de comple-

mentarios desearán esperar hasta que la tecnología alcance una cuota de mercado suficiente para lanzarse a producir (GUPTA *et al.*, 1999a; DUCEY y FRATRIK, 1989). Este problema puede al menos mitigarse estableciendo acuerdos que comprometan a los proveedores de complementarios a fabricar determinados productos, ayudando de esta manera al desarrollo de la red.

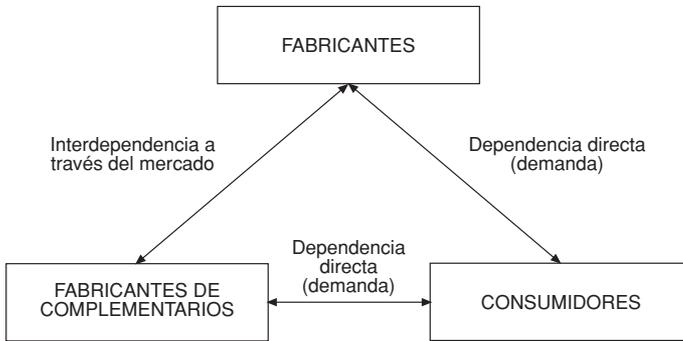
C) Productos complementarios

La existencia de un mercado de complementarios refuerza la tecnología y contribuye a su expansión (AMIT y ZOTT, 2001; GUPTA *et al.*, 1999a; BRYNJOLFSSON y KEMERER, 1996; WADE, 1995; CUSUMANO *et al.*, 1992). En efecto, el fácil acceso a los productos complementarios, su variedad y su precio son factores que determinan en gran medida la preferencia de un usuario por una determinada tecnología (SCHILLING, 2002 y 1998; KEILBACH y POSCH, 1998; GANDAL, 1994), ya que se produce un círculo virtuoso (YOFFIE, 1996; CHURCH y GANDAL, 1992) en el que a medida que existe una mayor cantidad de productos complementarios se expande la base de clientes de la tecnología, lo que a su vez genera una mayor cantidad de complementarios (Externalidades de Red Indirectas), hecho que fue testado empíricamente en el trabajo de GANDAL *et al.*, (2000) sobre la adopción de reproductores de CDs.

Otro aspecto que debe ser tenido en consideración es el efecto de los proveedores de productos complementarios en la competencia entre estándares. Por una parte los Efectos de Red inducen a los proveedores de productos complementarios a alinearse con la red de mayor tamaño ya que sus ventas serán mayores, pero a medida que aumenta el número de proveedores en la misma red, aumenta la competencia entre ellos y se reduce su cuota de mercado. Estos dos efectos de sentido contrario influyen decisivamente en el proceso de estandarización, de modo que si domina el Efecto Red todas las firmas se decantarán por la misma tecnología creándose un estándar *de facto*, mientras que si domina el efecto competitivo se establecerán grupos de proveedores que apoyen a las distintas redes (CHURCH y GANDAL, 1992). Por tanto en el caso del espónsor o espónsores de un estándar que no fabriquen ellos mismos los productos complementarios, su capacidad para alinear a los proveedores de productos complementarios con su estándar pasa a ser una capacidad de suma importancia para lograr el éxito en el mercado.

Por todo lo expuesto hasta el momento sobre la relación estándar / productos complementarios, los modelos de simbiosis desarrollados en el campo de la Biología Teórica pueden resultar muy adecuados en este contexto, tal y como se estudiará más adelante.

FIGURA 3.6
 INTERDEPENDENCIA ENTRE FABRICANTES
 Y PROVEEDORES DE PRODUCTOS COMPLEMENTARIOS

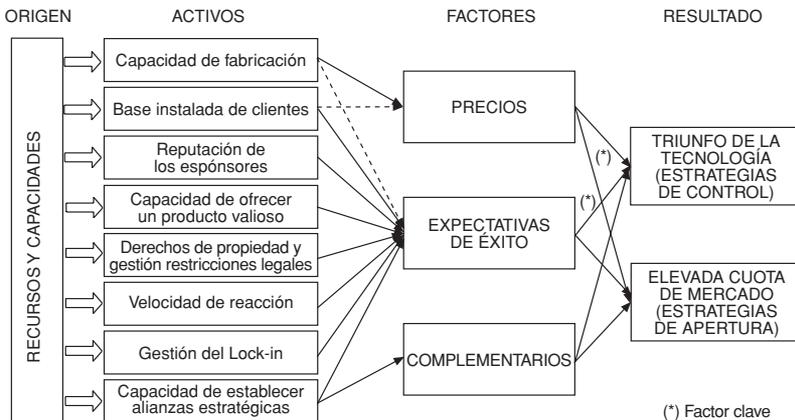


Fuente: GUPTA et al., (1999a).

D) Recapitulación: Factores clave para el éxito de una tecnología sujeta a Efectos de Red

La figura 3.7 sintetiza todo lo expuesto hasta el momento, esquemmatizando cuáles son los Factores Estratégicos que determinan la mayor o menor probabilidad de éxito en presencia de Efectos de Red.

FIGURA 3.7
 FACTORES CLAVE DEL ÉXITO
 DE UNA TECNOLOGÍA SUJETA A EFECTOS DE RED



Fuente: Elaboración Propia ⁶.

⁶ Publicado en LÓPEZ SÁNCHEZ y ARROYO BARRIGÜETE (2005a).

6. ESTRATEGIAS EN MERCADOS SUJETOS A EFECTOS DE RED

Según el análisis efectuado hasta el momento, las empresas que operan en mercados en los que aparecen Efectos de Red han de tener en consideración tres variables diferentes a fin de iniciar el proceso de realimentación positiva: precio, expectativas generadas y mercado de complementarios. SHAPIRO y VARIAN (1999a: 194) identifican, siguiendo este planteamiento, cuatro posibles estrategias genéricas que las organizaciones pueden desarrollar y que dan lugar a unas mayores o menores posibilidades de éxito así como a unos mayores o menores beneficios en caso de que la tecnología sea adoptada. Adicionalmente a estas cuatro estrategias es preciso considerar aquellas situaciones en las que se introduce una innovación sin que exista una tecnología precedente que cubra las mismas funciones (figura 3.8), con lo que no existirá competencia y por tanto el único factor limitante será el grado de aceptación de la tecnología por parte de los consumidores ⁷.

FIGURA 3.8

ESTRATEGIAS EN MERCADOS CON EFECTOS DE RED

	CONTROL	APERTURA
COMPATIBILIDAD	Transición controlada	Transición abierta
PRESTACIONES	Apuesta por las prestaciones	Discontinuidad
INNOVACIÓN RADICAL	Innovación controlada	Innovación abierta

Fuente: Adaptado de Shapiro y Varian (1999a: 194).

⁷ Aunque no es el objetivo de este trabajo entrar a discutir las distintas taxonomías existentes sobre innovaciones, es posible distinguir varias clasificaciones alternativas. Por ejemplo TUSHMAN y NADLER (1986) identifican innovaciones *Incrementales*, que proporcionan mejoras a una tecnología existente, *Siméticas*, que implican la combinación de tecnologías existentes para desarrollar otras nuevas, y *Discontinuas*, que suponen una mejora significativa respecto a las precedentes. Los dos primeros tipos se englobarían dentro de las estrategias de compatibilidad, mientras que el tercero, innovación discontinua, podría considerarse dentro de la estrategia de apuesta por las prestaciones o bien innovación radical. FREEMAN y PÉREZ proponen una taxonomía en la que se identifican innovaciones incrementales, innovaciones radicales, cambios en el sistema tecnológico y cambios en los paradigmas técnico económicos. En este caso, el primer tipo de innovaciones se relacionaría con las estrategias de compatibilidad, el segundo con la apuesta por las prestaciones, y los dos últimos podrían relacionarse (con ciertos matices) con la estrategia de inno-

En primer lugar la empresa puede optar por una estrategia de apertura (competencia dentro del mercado) o de control (competencia por el mercado), desarrollando estándares que otras empresas del sector puedan emplear, o bien manteniendo el control de la tecnología⁸. En general las empresas más fuertes tenderán a oponerse a la compatibilidad⁹ mientras que las más débiles pueden estar a favor (ENCAOUA *et al.*, 1996; KATZ y SHAPIRO, 1994 y 1985), ya que si una compañía está segura de sus posibilidades de éxito probablemente desee imponer su propio estándar¹⁰.

Las estrategias de apertura presentan la ventaja de proporcionar unas mayores probabilidades de éxito, ya que al estar esponsorizadas por un grupo de empresas en vez de por una sola atraerán a más usuarios (YANG, 1997: 5), especialmente si el estándar desarrollado está respaldado por empresas relevantes. Además el temor al *lock-in* por parte de los potenciales usuarios será menor, ya que pueden contar con que exista competencia futura dentro del mercado. Ciertamente resulta mucho más sencillo lograr volumen empleando estándares abiertos que con estrategias de control (MCGEE y SAMMUT, 2002; SCHILLING, 2002; GARUD y KUMARASWAMY, 1993), ya que si existen varios productores que compiten con diferentes estándares incompatibles entre sí, la adopción de la tecnología puede retrasarse mientras los potenciales usuarios esperan a que algunos o todos los productores se decidan por un estándar común. En este sentido algunos autores como WADE (1995) o ECONOMIDES (2003) opinan que una de las claves del éxito del vídeo VHS frente al Beta fue que Sony, propietario del segundo, mantuvo el control sobre su tecnología, mientras que Matsushita siguió la estrategia contraria¹¹.

Por otra parte las estrategias de control dificultan la aceptación de una nueva tecnología, pero en caso de éxito el control total de la misma implica unos mayores beneficios para la empresa. El problema derivado de esta estrategia es que si resulta perdedora, una tecnología corre el

vación radical. Sin embargo en este libro se adopta un enfoque similar al propuesto por ROBERTSON (1967) que distingue entre innovaciones continuas, dinámicamente continuas y discontinuas.

⁸ SUN *et al.*, (2004) plantean otras posibilidades, desglosando las estrategias de apertura y control en cuatro, ya que consideran la posibilidad de ofrecer el producto en dos gamas de calidad diferentes.

⁹ El concepto de compatibilidad varía en la literatura, aunque siguiendo a YANG (1997, pp. 6) se considerará que dos tecnologías son compatibles cuando los costes de combinarlas para generar servicios es cero.

¹⁰ Sin embargo el trabajo de XIE y SIRBU (1995) probó que bajo ciertas circunstancias incluso un monopolista puede estar interesado en la compatibilidad de estándares, ya que si existen fuertes Efectos de Red y el monopolista aún no ha desarrollado una base de clientes suficientemente grande, la aparición de competidores puede acelerar el crecimiento de la red. Como ya se ha comentado, un resultado similar fue propuesto por ECONOMIDES (1996a y 1996b).

¹¹ Para un estudio detallado de la competencia entre el estándar VHS y Betamax puede consultarse CUSUMANO *et al.*, (1992)

riesgo del denominado *lock-out* (YOFFIE, 1996), quedando excluida de participar en el mercado al no ser compatible con la tecnología vencedora. En este caso el uso de convertidores que permitan conectar la red perdedora a la vencedora puede ser una solución, pero además de los problemas legales que puede suponer, es una señal clara de debilidad, de modo que puede acelerar aún más su desaparición. Y en cualquier caso la compañía proveedora de la tecnología dominante tendrá fuertes incentivos para evitar que se logre la compatibilidad a través de estos convertidores (FARRELL y SALONER, 1992).

Por tanto una compañía que opere en un mercado en el que existen Efectos de Red debe decidir entre apertura o control. Adherirse a un estándar compatible líder permite a una tecnología beneficiarse de una gran red de usuarios pero le hace perder el control del mercado y lleva a una mayor competencia dentro del mismo. Optar por un estándar incompatible le hace tener menos competencia dentro de su mercado pero la red posiblemente será menor (ECONOMIDES y FLYER, 1997).

En segundo lugar es posible optar por una tecnología compatible¹² con la ya existente o por el contrario apostar por las prestaciones ofreciendo un producto que reporte tales beneficios a los usuarios que los compense por los costes de cambio asociados. Es necesario en este caso considerar cuál es el valor real de la tecnología y en qué medida es suficiente para que sea adoptada pese a los costes que supone su incompatibilidad con la ya instalada, aunque en general puede afirmarse que a medida que la innovación resulta más radical, se incrementa la incertidumbre y por tanto el riesgo (TUSHMAN y NADLER, 1986). El ejemplo más típico lo constituye el mercado de reproductores de vídeo doméstico: la tecnología de los DVDs, incompatible con el VHS, genera unos costes de cambio en los usuarios (la mayor de ellas, que todas las películas grabadas o adquiridas para VHS quedan obsoletas), pero ha sido adoptada por las ventajas que reporta respecto a su predecesora.

SHY (1996) probó que la sustitución de una tecnología por otra superior e incompatible dependía en gran medida de cómo considerasen los usuarios la relación calidad / tamaño de la red. En el caso de considerarlos como sustitutivos la adopción será más rápida debido al incremento de utilidad derivado de la superioridad de la nueva tecnología, pero en el caso de considerarlos como complementarios la adopción resultará mucho más costosa, hecho que fue confirmado por el modelo de simulación desarrollado por DIJK y NOMALER (2000).

¹² No debe confundirse esta compatibilidad, que hace referencia a compatibilidad entre tecnología instalada y nueva tecnología que se trata de introducir, con la compatibilidad de la que se hablaba en las estrategias de apertura y control. En ese caso la compatibilidad (estrategias de apertura) hacía referencia a la existencia de un estándar común que puedan emplear varias empresas.

Sin embargo la coexistencia de tecnologías incompatibles es también posible. DE BIJL y GOYAL (1995) estudiaron el proceso de cambio tecnológico en un modelo duopolístico en presencia de Externalidades de Red, llegando a la conclusión de que en un mercado con consumidores heterogéneos es posible la coexistencia de tecnologías incompatibles. También en este caso se ha estudiado el impacto del uso de convertidores en la adopción de una nueva tecnología incompatible con la existente, y pese a que la mayor parte de la literatura coincide en que su uso puede favorecer la transición, CHOI (1996) afirma que existen circunstancias en las que sucede lo contrario. Es decir, puesto que en presencia de convertidores los usuarios de la antigua tecnología pueden mitigar los costes de quedar anclados empleando una tecnología obsoleta, se frenará la transición hacia la nueva tecnología ya que sus incentivos para cambiar serán menores.

A continuación analizaremos detalladamente las diferentes estrategias mostradas en la figura 3.8.

A) Transición controlada

Esta estrategia consiste en ofrecer una nueva tecnología, compatible con la existente, pero propiedad de la empresa que la ha desarrollado. En este caso el valor generado para el consumidor puede ser menor que en una revolución, pero presenta la ventaja de minimizar los costes de cambio colectivos. La clave del éxito es, en este caso, ofrecer un mayor valor que los productos presentes en el mercado al tiempo que se garantiza una adecuada conectividad con la red ya existente, por lo que es preciso no sólo disponer de las adecuadas capacidades tecnológicas para desarrollar el producto, sino evitar cualquier tipo de restricción legal que pueda impedir su comercialización.

Por otra parte, en lo que respecta a las expectativas de éxito, optar por una estrategia de control como la que analizamos, plantea mayores incertidumbres que una estrategia de apertura. Por ello suele ser más adecuada para empresas con una sólida posición en el mercado y que ya cuentan con una importante base de usuarios.

El sistema Operativo Windows constituye un claro ejemplo de este tipo de estrategias, ya que sus nuevas versiones ofrecen determinadas mejoras manteniendo la compatibilidad con las versiones anteriores. Lo mismo puede decirse de los servicios de mensajes instantáneos *messenger*: el *messenger* de Yahoo, por ejemplo, va siendo mejorado en sucesivas versiones pero es incompatible con otros sistemas de mensajería como el *messenger* de Hotmail.

B) Apuesta por las prestaciones

Se trata de la estrategia más arriesgada en presencia de otra tecnología rival y a su vez la que mayores beneficios puede reportar en caso de tener éxito, ya que la empresa opta por ofrecer una tecnología incompatible con la ya instalada en el mercado y sobre la que mantiene los derechos en exclusiva de propiedad (SHAPIRO y VARIAN, 1999a: 195).

Si en el caso de la transición controlada se mencionaba la importancia de tener una posición relevante en el mercado, en este caso resulta ser un factor mucho más trascendente, ya que a la incertidumbre asociada a las estrategias revolucionarias en general hay que añadir los costes de cambio ocasionados por su incompatibilidad. Y en este sentido es preciso recordar la regla «10X», que afirma que es necesario ofrecer unas prestaciones al menos diez veces superiores respecto a las de la tecnología establecida para iniciar una revolución. La Palm Pilot de U. S. Robotics es un ejemplo de este tipo de estrategia.

C) Innovación controlada

En este caso se introduce una tecnología que por su carácter innovador no cuenta con ningún precedente, al tiempo que la empresa mantiene el control de la tecnología. Dado que no existe tecnología con la que deba competir, su evolución estará condicionada únicamente por el grado de aceptación que logre.

El primer servicio de mensajería (*messenger ICQ*) lanzado en 1996 es un ejemplo de esta estrategia: aunque posteriormente se han desarrollado otros *messenger* (por ejemplo los de Hotmail y Yahoo) en su momento no existía otra tecnología alternativa para el intercambio instantáneo de mensajes, puesto que los *chats* no cubren exactamente las mismas funciones.

D) Transición abierta

En este caso se pretende introducir una tecnología compatible con las existentes y en la que participan diferentes proveedores a través de un estándar común. Dado que los costes de cambio para el consumidor son escasos y las expectativas de éxito elevadas por la participación de varias empresas, se trata de una estrategia con menos probabilidades de fracaso que las anteriores. No obstante, el riesgo potencial para las empresas que participan en este tipo de actuaciones se deriva de no ser capaces de hacerse con una adecuada cuota de mercado, ya que habrá varias

empresas ofreciendo productos similares. Serán aquellas empresas que cuenten con una mejor ingeniería y capacidad de fabricación las que saldrán más beneficiadas.

La evolución de los módems puede servir de ejemplo para ilustrar cómo se implementan en la práctica este tipo de estrategias, al igual que ocurre con muchos componentes de hardware.

E) Discontinuidad

Consiste en ofrecer una nueva tecnología incompatible pero respaldada por varios proveedores, lo que incrementa sus probabilidades de aceptación. De este modo, al igual que en el caso de la estrategia de «apuesta por las prestaciones» el objetivo es proporcionar un producto con un elevado valor para los consumidores, aunque en este caso el uso de una tecnología abierta hace más sencillo que llegue a tener éxito. La introducción de los DVDs en el mercado del vídeo doméstico muestra cómo el uso de un estándar común por parte de múltiples empresas ha permitido sustituir a la tecnología VHS.

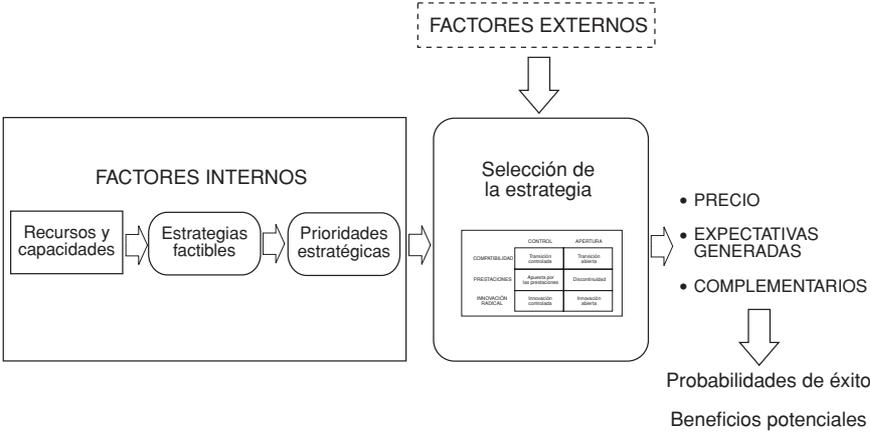
F) Innovación abierta

Al igual que en el caso de la «innovación controlada» no existe tecnología rival por lo que no puede hablarse de competencia. Pero en este caso la introducción resultará más sencilla al contar con el apoyo de varias compañías en vez de con el de una sola. Los teléfonos móviles de última generación pueden considerarse un ejemplo de esta estrategia, ya que determinadas funcionalidades como la vídeo-llamada resultan sumamente novedosas en el contexto de la telefonía móvil.

G) Selección de estrategias

Como se ha analizado hasta al momento, la empresa dispone de diferentes alternativas en cuanto a la estrategia a seguir, aunque obviamente no todas las estrategias son viables para cualquier empresa, sino que la gama de alternativas posibles viene condicionada por sus características. Además la relación entre estrategias factibles y estrategia seleccionada está moderada por las prioridades estratégicas de la empresa y por otra serie de factores externos, de modo que de entre la gama de alternativas posibles la organización deberá seleccionar aquella que más se adapte a sus prioridades teniendo en cuenta los factores del entorno (figura 3.9). Las posibilidades de éxito y los beneficios potenciales estarán fuertemente condicionados por su elección.

FIGURA 3.9
PROCESO DE SELECCIÓN DE ESTRATEGIAS



Fuente: Elaboración propia.

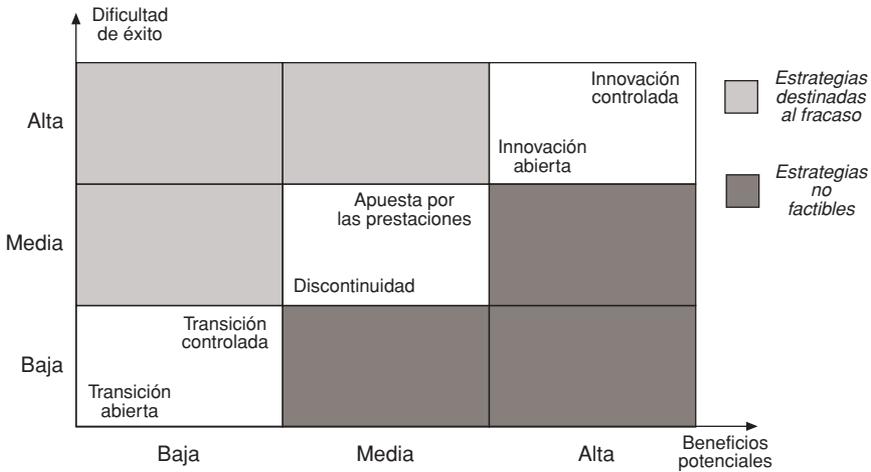
Resumiendo todo lo expuesto hasta el momento puede afirmarse que en general las estrategias de control resultan más arriesgadas, aunque pueden conducir a situaciones monopolísticas con todas las implicaciones que esto conlleva, mientras que las de apertura darán lugar a una situación más equilibrada entre todos los actores implicados, limitando por tanto las ganancias de cada uno de ellos. En lo que respecta a la otra dimensión de la matriz estratégica, a mayor grado de innovación e incompatibilidad, mayor riesgo, aunque también mayores beneficios potenciales en caso de éxito. Por tanto, y partiendo de estas dos premisas básicas, es posible proponer una clasificación de estrategias en función de su dificultad de éxito y beneficios potenciales como la que se muestra en la figura 3.10.

7. EL PROBLEMA DE LA MODELIZACIÓN DE MERCADOS DE REDES

A lo largo del presente capítulo se han mencionado algunos trabajos desarrollados para modelizar la competencia entre tecnologías sujetas a Efectos de Red. Dichos trabajos, la mayoría de ellos teóricos, adolecen en la mayor parte de los casos de considerar la competencia entre un número limitado de tecnologías. Como afirma VAN HOVE (1999) apenas sí se ha desarrollado literatura sobre competencia entre más de dos estándares, aunque existen notables excepciones como por ejemplo los trabajos de

FIGURA 3.10

ESTRATEGIAS EN MERCADOS CON EFECTOS DE RED:
DIFICULTAD VS BENEFICIOS POTENCIALES



Fuente: Elaboración propia.

MATUTES y PADILLA (1994) y KEILBACH y POSCH (1998) sobre competencia entre tres tecnologías. En este sentido, la ventaja que representa el enfoque basado en la Teoría de Sistemas Dinámicos es que hace relativamente sencillo generalizar un modelo de competencia para incluir tantas tecnologías como se desee, con la única limitación del coste computacional de resolución de las ecuaciones, tal y como se estudiará más adelante.

Otro problema de las investigaciones en este campo es la escasez de datos para efectuar las correspondientes validaciones empíricas, problema que se incrementa sustancialmente a medida que se pretenden validar modelos con varias tecnologías en competencia. En este sentido, y como se estudiará en el siguiente capítulo, puesto que la dinámica de sistemas pretende explicar el comportamiento en términos más cualitativos, su necesidad de datos cuantitativos para la formulación del modelo es menor. Y es que el interés se centra en la comprensión de las fuerzas que operan entre las partes del sistema, y la precisión con que se conozcan los parámetros del modelo tiene un interés secundario. Además, la interpretación de los modelos desarrollados de este modo resulta relativamente sencilla.

La tercera ventaja de emplear un enfoque basado en la Teoría de Sistemas Dinámicos, y ciertamente la más importante de todas, es que al ser las Externalidades de Red un fenómeno caracterizado por la presen-

cia de realimentación, la Teoría de Sistemas Dinámicos surge de forma natural como la manera más adecuada de modelizar dicho fenómeno.

En el siguiente capítulo trataremos las herramientas matemáticas requeridas para formular modelos de difusión y competencia entre tecnologías sujetas a Efectos de Red desde la Teoría de Sistemas Dinámicos.

8. CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo se han expuesto algunas ideas relevantes para el estudio de los mercados de redes, aunque como en el capítulo anterior destacaremos tres de ellas.

- La difusión de un producto de red sigue una pauta de penetración en el mercado de tipo sigmoïdal, común a muchos productos, pero en la que la duración de las fases difiere respecto a la mayoría de ellos como consecuencia de los efectos de red.

- La curva de demanda presenta dos puntos de equilibrio para un precio dado. El primero de ellos, denominado «masa crítica», es inestable y representa el tamaño mínimo de la base instalada necesario para iniciar el proceso de adopción masiva. El segundo punto de equilibrio es estable e indica el tamaño de saturación.

- Hay diferentes estrategias que las empresas que operan en mercados de redes pueden desarrollar. Teniendo en consideración cuáles son los factores claves para el éxito en este tipo de mercados (precio, expectativas y complementarios), sus propias características y sus prioridades estratégicas, las compañías habrán de seleccionar aquella que consideren más oportuna en cada momento.

CAPÍTULO IV

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es desarrollar una breve introducción a la Teoría de Sistemas Dinámicos, de modo que aquellos lectores que no estén familiarizados con dicha teoría, conozcan los elementos básicos necesarios para comprender el resto de capítulos del libro. Se parte de una descripción de los conceptos fundamentales, identificando los distintos tipos de sistemas, sus características y formulación. Posteriormente se introduce el concepto de sistema caótico desde un punto de vista cualitativo y obviando los aspectos más técnicos. Por último se desarrolla una breve introducción a los métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, algo que resulta necesario para tratar con este tipo de modelos, ya que en general no cuentan con solución analítica.

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de Sistemas Dinámicos puede considerarse una forma de describir cómo un determinado estado se transforma en otro a lo largo del tiempo, es decir, cómo evoluciona en el tiempo un cierto proceso. De modo algo más concreto FERNÁNDEZ DÍAZ (2000: 55) define un sistema dinámico como un conjunto de elementos caracterizados por una serie de variables que se relacionan entre sí mediante ecuaciones matemáticas, siendo el objetivo determinar la evolución temporal de dichas variables. Se emplearán por tanto ecuaciones diferenciales en el caso de los sistemas continuos y ecuaciones en diferencias en los discretos.

Cualquier sistema realimentado de dimensión finita puede ser representado mediante ecuaciones diferenciales o en diferencias (MEES, 1986: 99) y de ahí la utilidad de emplear este tipo de técnicas para modelizar un fenómeno como las Externalidades de Red, que se caracteriza precisamente por la existencia de realimentación. Como afirma ARTHUR (1990), aquellos sistemas caracterizados por la realimentación deben ser modelizados como procesos dinámicos.

En este sentido merece la pena reproducir dos comentarios relativos a la aplicación de la Teoría de Sistemas Dinámicos. El primero de ellos (LEVY, 1994) apareció en un artículo publicado en el *Strategic Management Journal*: «la Teoría del Caos proporciona un útil marco teórico para comprender la evolución de las industrias y las complejas interacciones existentes entre los distintos actores implicados». El segundo es especialmente relevante en el contexto de este libro, en tanto que fue realizada por Ludwig VON BERTALANFFY, uno de los biólogos teóricos más importantes de la primera mitad del siglo XX¹, y el artículo al que se hace referencia fue publicado en el *Academy of Management Journal* (BERTALANFFY, 1972): «La naturaleza interdisciplinaria de los conceptos, modelos y principios aplicados a sistemas proporciona una posible aproximación hacia la unificación de la ciencia».

2. SISTEMAS DINÁMICOS: CONCEPTOS GENERALES

Diremos que una ecuación diferencial (o en diferencias) es de primer orden cuando está caracterizada por una única variable x , que puede considerarse la coordenada de un punto en una recta denominada espacio de fases, y que se mueve a lo largo de ella con el paso del tiempo. El espacio de fases es por tanto un espacio vectorial en el que cada vector representa la descripción instantánea del sistema dinámico en un determinado momento, siendo cada una de las componentes del vector una de las variables del sistema. Al recorrido de la solución, $x(x_0, t)$, se le denomina órbita o trayectoria.

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad \text{Ecuación diferencial de primer orden}$$

$$x_{k+1} = f(x_k, k) \quad \text{Ecuación en diferencias de primer orden}$$

Los sistemas dinámicos de primer orden estarán por tanto constituidos por este tipo de ecuaciones. Pero es posible formular modelos más

¹ No olvidemos que muchos de los modelos que se tratarán en el capítulo VI provienen del campo de la Biología Teórica.

complejos de orden mayor que uno, que quedarán representados por sistemas de ecuaciones, como por ejemplo los sistemas continuos de segundo orden:

$$\begin{aligned}x_1' &= \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, t) \\x_2' &= \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, t)\end{aligned}$$

Es preciso aclarar que un sistema dinámico de segundo orden es lo que se conoce también como sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, y que toda ecuación diferencial de segundo orden equivale de hecho a uno de estos sistemas. En efecto, si consideramos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = 0$$

siempre es posible realizar el cambio de variable $y(t) = dx/dt$, de modo que la ecuación diferencial de segundo orden puede expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:

$$\begin{aligned}y &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= -f(x, y, t)\end{aligned}$$

No obstante hay sistemas dinámicos de segundo orden que no provienen de una única ecuación diferencial de segundo orden, de modo que el concepto de sistema dinámico es más amplio. En el caso más general, un sistema dinámico constará de n ecuaciones representando el estado de n variables en un espacio de fases de dimensión n .

$$\begin{aligned}x_k' &= \frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ k &= 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

Las ecuaciones de Lotka-Volterra para competencia entre n especies que aparecen en cualquier manual de sistemas dinámicos o biología teórica (ver por ejemplo LUENBERGER, 1979: 374-375) son un ejemplo de este tipo de sistemas. No obstante, a medida que se incrementa la dimensión del modelo, los cálculos numéricos requeridos para su resolución

umentan de forma considerable, llegando a hacerlos inviables en algunos casos. Ésta es la conocida «maldición de la dimensión».

Por otra parte se pueden distinguir tres tipos de sistemas dinámicos en función del comportamiento de sus órbitas. Llamando U al subconjunto de \mathbb{R}^n en el que se mueve el sistema tendremos:

- **Sistemas Disipativos:** U se contrae con el paso del tiempo, de modo que todo movimiento se atenúa con el tiempo tendiendo a una posición de equilibrio². La característica fundamental de este tipo de sistemas es la pérdida de energía como consecuencia de algún tipo de fricción.

- **Sistemas Conservativos:** U se mantiene con el paso del tiempo. Como su propio nombre indica la energía del sistema se conserva.

- **Sistemas Expansivos:** U se expande con el paso del tiempo.

Además las ecuaciones y sistemas de ecuaciones pueden ser lineales, cuando la función f es lineal en cada una de las variables (polinomio de grado 1), y no lineales cuando ocurre lo contrario. Por ejemplo la ecuación $x' = ax - b$ es lineal mientras que la logística $x' = ax - bx^2$ no lo es. El problema de los sistemas no lineales es que su complejidad obliga casi siempre a emplear métodos numéricos para la búsqueda de soluciones. Finalmente hablaremos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones autónomos si no contienen de forma explícita la variable independiente t , en el caso de los sistemas continuos, o k , en el caso de los discretos.

Respecto a la formulación de modelos utilizando la Teoría de Sistemas Dinámicos, el procedimiento es similar al seguido con otro tipo de técnicas, y pueden distinguirse esencialmente tres fases (ARACIL SANTOJA, 1983: 135-177):

1. **Conceptualización**, basada en la comprensión del fenómeno objeto de estudio.
2. **Formulación del modelo** mediante las ecuaciones diferenciales o en diferencias adecuadas.
3. **Evaluación del modelo** mediante el uso de simulaciones por ordenador. En esta etapa se incluye el análisis de sensibilidad, es decir, el estudio de la dependencia de los resultados respecto a los valores de los parámetros.

El proceso de construcción del modelo no es estrictamente secuencial, sino que en ocasiones será necesario volver a etapas anteriores con

² El equilibrio no tiene por qué ser necesariamente un único punto. Debe entenderse equilibrio como la existencia de un atractor.

el fin de ir ajustando cada vez con mayor precisión el modelo al sistema real que se está analizando.

Por otra parte la dinámica de sistemas difiere de otros métodos de análisis estadístico, ya que estos últimos ponen especial énfasis en la predicción puntual, mientras que la dinámica de sistemas pretende explicar el comportamiento en términos más cualitativos por lo que su necesidad de datos cuantitativos para la formulación del modelo es menor: el interés se centra en la comprensión de las fuerzas que operan entre las partes del sistema y por tanto la precisión con que se conozcan los parámetros del modelo tiene un interés secundario (ARACIL SANTOJA, 1983: 171).

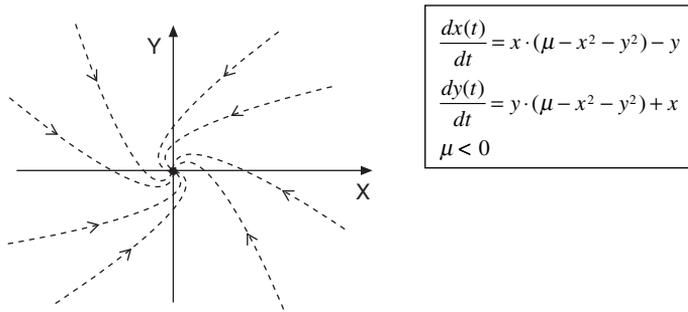
Por último es preciso indicar que se han desarrollado numerosos trabajos en el ámbito de la Economía basados en la Teoría de Sistemas Dinámicos, lo que justifica la utilidad de este tipo de métodos en dicho ámbito de investigación. Como muestra, recientemente LANDA BERCEBAL y VELASCO MORENTE (2004) han publicado un trabajo en el que prueban, aplicando esta técnica, que se pueden obtener ciclos límite en modelos empresariales. RODRÍGUEZ ARANA (2004) ha estudiado la inestabilidad dinámica de un modelo basado en la curva de Phillips. VÍLCHEZ LOBATO *et al.*, (2002) aplicaron estos modelos para estudiar la pesquería en la región Suratlántica española. En los manuales de LOMELÍ y RUMBOS (2003), FERNÁNDEZ DÍAZ (2000) o ARACIL SANTOJA (1983) también pueden encontrarse algunos ejemplos de diferentes problemas socioeconómicos estudiados mediante este enfoque. El manual de PUU (2003) incluye también unos interesantes modelos algo más complejos, proponiendo incluso un modelo de crecimiento de la población que podría emplearse como modelo de difusión de tecnologías (pp. 504-509). La Tesis Doctoral de GIMENO NOGUÉS (2000) es otra interesante aplicación de esta teoría al análisis de series temporales financieras, y en esta misma línea OLMEDA y PÉREZ (1995) estudiaron la presencia de caos en el mercado de valores español. La Tesis Doctoral de NAVARRO CID (2001) y sus trabajos en este campo (NAVARRO CID, 2000), con un enfoque mucho más organizativo que las investigaciones anteriormente mencionadas, son otros ejemplos que muestran las considerables posibilidades de esta técnica matemática.

3. ATRACTORES

El concepto de atractor va ligado a los sistemas disipativos, puesto que son los únicos en los que U se contrae con el paso del tiempo (GIMENO NOGUÉS, 2000: 64). Se define como un subconjunto A del espacio de fases al que las órbitas convergen, de modo que una vez alcanzado, las trayectorias ya no pueden escapar y permanecen siempre dentro de él. Existen cuatro tipos fundamentales de atractores:

1. **Puntos fijos.** Este tipo de atractores consiste en un único punto al que tienden todas las órbitas que se inician en su entorno. El sistema dinámico que se muestra en la figura 4.1 presenta un punto fijo en el origen de coordenadas para valores negativos de su parámetro (KHALIL, 2002: 73-74), mientras que para valores positivos genera un ciclo límite como se muestra en la figura 4.2.

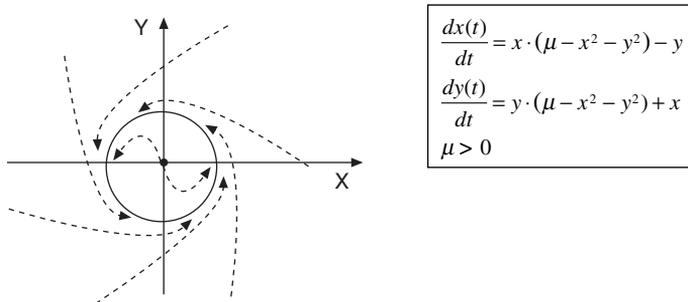
FIGURA 4.1
EJEMPLO DE PUNTO FIJO



Fuente: Adaptado de KHALIL, (2002: 75).

2. **Atractor periódico o ciclo límite.** Un punto periódico o cíclico se define como un punto ξ para el que existe un n tal que $f^n(\xi) = \xi$, es decir, la órbita se cierra. El menor entero n que satisface la expresión se denomina orden del punto periódico. Un atractor periódico estará formado por el conjunto de puntos periódicos que visita un vector antes de volver sobre sí mismo (figura 4.2).

FIGURA 4.2
EJEMPLO DE ATRACTOR PERIÓDICO



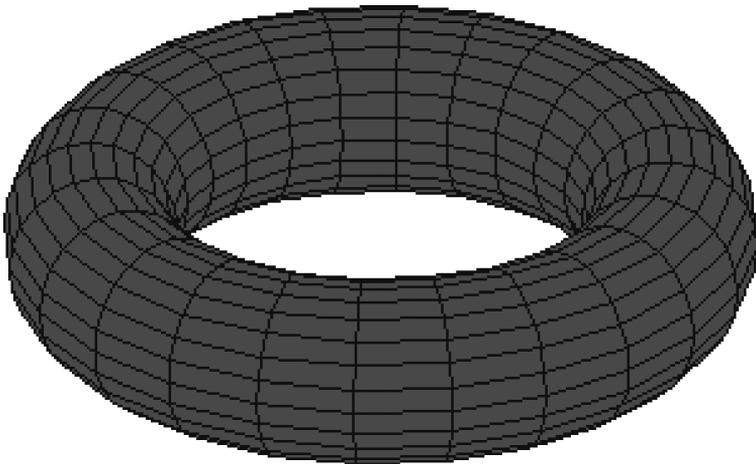
Fuente: Adaptado de KHALIL, (2002: 75).

Es importante mencionar que en 1975 Tien-Yien LI y James A. YORKE probaron que si un sistema dinámico unidimensional tiene un punto periódico de período 3, entonces tiene puntos periódicos de todos los períodos posibles (ver MARTÍN *et al.*, 1995: 201). Esto implica, como ocurre en el caso de la ecuación logística discreta, que existirá comportamiento caótico.

3. **Atractor Cuasi Periódico o Toro.** Este tipo de atractor surge de la unión de distintos ciclos periódicos de distinta periodicidad. En este caso, las órbitas que empiezan cerca las unas de las otras permanecen siempre cercanas, pero una órbita cualquiera continuará indefinidamente dando vueltas alrededor del toro sin volver a encontrarse nunca consigo misma (movimiento cuasiperiódico) o encontrándose consigo misma tras un número entero de rotaciones (movimiento periódico) (SCHAFFER y KOT, 1986: 158). Por tanto el conjunto de acumulación de las trayectorias no es un punto fijo de dimensión cero, ni un ciclo límite de dimensión uno, sino una superficie bidimensional con forma toroidal (FERNÁNDEZ PÉREZ *et al.*, 2003: 398).

No obstante, aunque el comportamiento de este tipo de atractores, representado en la figura 4.3, es bastante más complejo que el de los ya mencionados, dado que las órbitas cercanas permanecen próximas a medida que transcurre el tiempo, resulta posible realizar predicciones sobre el estado futuro del sistema, algo que no ocurre con los atractores extraños que se estudiarán a continuación.

FIGURA 4.3
ATRACTOR CUASI PERIÓDICO O TORO



Fuente: Elaboración propia.

4. **Atractor Extraño.** Este tipo de atractores presentan una geometría muy compleja, siendo lo que en matemáticas se denominan fractales³ (PEITGEN *et al.*, 1992: 656). Un fractal (acuñado por Benoît MANDÉLBROT) es un objeto que puede tener dimensión no entera (para ser más precisos, con dimensión de Hausdorff-Besicovitch mayor que su dimensión topológica). Al margen de detalles técnicos, esto significa que un objeto que tenga, por ejemplo, dimensión 1.26 (que en concreto es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch para la curva de Koch) tendrá una longitud infinita (dimensión mayor que 1) y un área nula (dimensión menor que dos. Ver por ejemplo PEAK y FRAME, 1994: 91-92).

Merece la pena tratar brevemente el concepto de dimensión fractal dado que puede resultar confuso en primera instancia, y para ello se introducirán brevemente algunos conceptos elementales al menos de forma intuitiva. El modo más simple de medir la dimensión de un objeto es «contando» el volumen del número mínimo de esferas (o cubos) de dimensión adecuada que pueden recubrir el objeto. Llamando $N(r)$ al número de esferas de radio r que recubren el objeto A , la dimensión que se calcularía mediante este procedimiento sería la siguiente (ECKMANN y RUELLE, 1985):

$$\dim_k A = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}$$

En el caso de un objeto fractal esta dimensión puede tomar valores fraccionarios. La dimensión de Hausdorff-Besicovitch, cuyo cálculo resulta más complicado, es en general algo distinta a la obtenida por este procedimiento (no se entrará en detalles técnicos pero para ello puede consultarse ECKMANN y RUELLE, 1985), aunque el método indicado sirve para comprender al menos a nivel intuitivo, cómo puede calcularse la dimensión de un objeto fractal⁴.

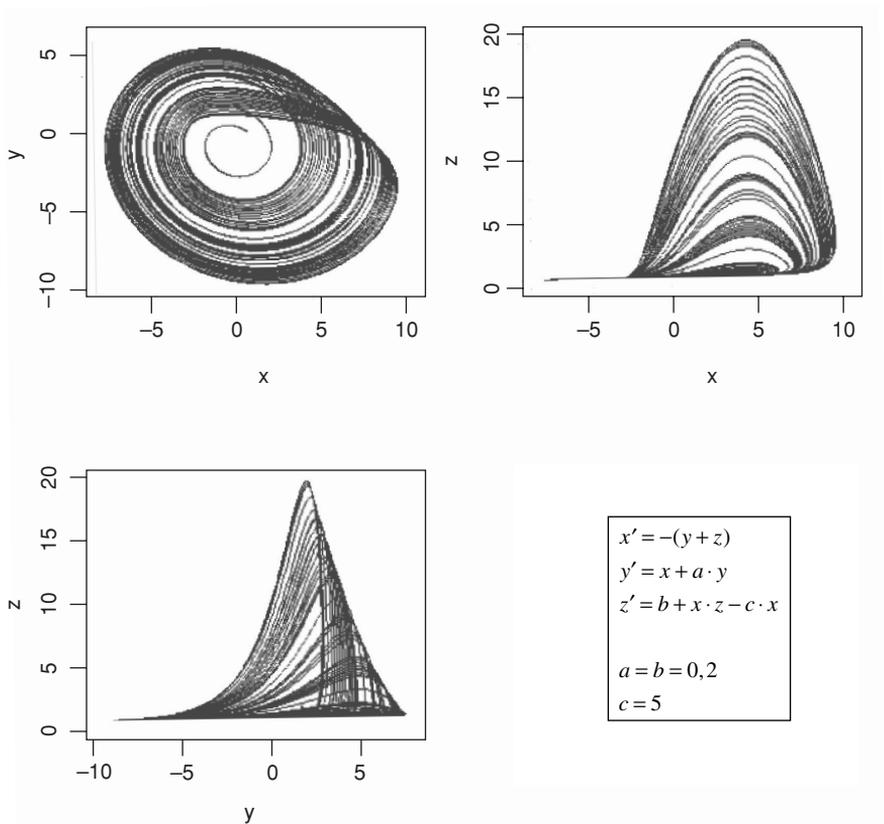
Volviendo a los atractores extraños, como afirman PEITGEN *et al.*, (1992: 656) estos objetos, que caracterizan el estado final de los sistemas disipativos altamente complejos, constituyen el nexo entre el caos y los fractales. Esto se debe a que dichos atractores considerados como objetos dinámicos son caóticos, y considerados como objetos geométricos son fractales. El comportamiento en este caso es impredecible y errático, de modo que un sistema dinámico que presente este tipo de atrac-

³ En la actualidad algunos investigadores afirman que en determinados sistemas caóticos pueden aparecer atractores extraños no fractales, aunque no se entrará a discutir este tema porque escapa al objeto del presente libro.

⁴ Hay que indicar que existen también otras formas alternativas de calcular la dimensión fractal (en este sentido puede consultarse por ejemplo PEITGEN *et al.*, 1992: 721-744).

tores exhibirá un comportamiento sin pauta reconocible, y una órbita atrapada en el atractor recorrerá a largo plazo todas las regiones que lo componen. La figura 4.4 muestra uno de los atractores extraños más conocidos y mencionados en la literatura.

FIGURA 4.4
ATRACTOR EXTRAÑO DE RÖSSLER



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

4. SISTEMAS CAÓTICOS

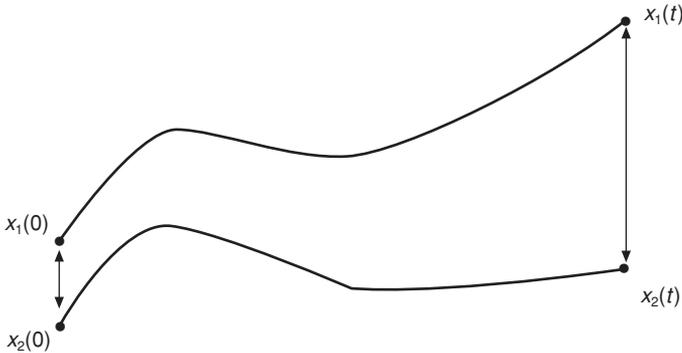
Los sistemas que presentan atractores extraños se denominan *sistemas caóticos*. Existen muchas posibles definiciones de caos (DEVANEY, 1986: 49), aunque quizá una de las más empleadas es aquella que caracteriza a un sistema caótico por tres propiedades (ver por ejemplo GIRALDO y SASTRE, 2002: 73; FERNÁNDEZ DÍAZ, 2000: 88-90; DEVANEY, 1986: 49-50):

1. **Dependencia de las condiciones iniciales.** Dadas dos condiciones iniciales arbitrariamente próximas, tras un número de iteraciones suficientemente grande pueden hallarse muy separadas. Éste es el conocido «efecto mariposa».

En efecto, si consideramos dos condiciones iniciales muy próximas, $x_1(0)$ y $x_2(0)$, de modo que $|x_1(0) - x_2(0)| = \xi_0$, al cabo de un tiempo t suficientemente grande ambas órbitas se hallarán muy separadas (ver figura 4.5).

FIGURA 4.5

SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES
EN SISTEMAS CAÓTICOS



Fuente: Ott (1993: 16).

Por ejemplo, en el caso concreto del atractor de Lorenz, las órbitas divergen como una exponencial de parámetro 0.9, es decir, $|x_1(t) - x_2(t)| \propto \xi_0 \cdot \exp(0,9 \cdot t)$. En este sentido, los denominados exponentes de Liapunov miden precisamente el crecimiento medio de errores infinitesimales en los valores iniciales, siendo por tanto una medida de la sensibilidad a las condiciones iniciales. Si denominamos ξ_0 al error inicial cometido, tras n iteraciones se habrá transformado en ξ_n . En este caso el exponente de Liapunov se define como:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_n \left| \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} \right|$$

Aplicando esta definición general al caso concreto de sistemas dinámicos continuos obtenemos la siguiente expresión:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Ln \left| \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\xi_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Ln \left| \frac{f(x_{k-1} + \xi_{k-1}) - f(x_{k-1})}{\xi_{k-1}} \right| =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Ln |f'(x_{n-1})|$$

Por tanto cualquier error inicial se multiplicará por e^λ en cada iteración, de modo que si el exponente es positivo las órbitas cercanas se alejarán (sensibilidad a las condiciones iniciales). De ello se deduce que cualquier sistema caótico ha de tener al menos un exponente de Liapunov positivo (un sistema de dimensión m tendrá m exponentes de Liapunov). No se entrará en más detalles técnicos, pero por ejemplo en WIGGINS (2003: 726-735) puede encontrarse una descripción algo más completa.

De hecho la sensibilidad a las condiciones iniciales es probablemente la característica más relevante del caos, de modo que algunos científicos definen los sistemas caóticos simplemente como aquellos que presentan sensibilidad a las condiciones iniciales.

2. **Transitividad o mezclado.** Una función $f: V \rightarrow V$ presenta transitividad si dados dos conjuntos cualesquiera U y W pertenecientes a V , tras un número de iteraciones suficientemente grande siempre encontraremos condiciones iniciales de U que llevan a W . En términos menos formales el significado de esta propiedad es simplemente que las órbitas que partan cerca de cualquier punto deben errar por todas partes.

3. **Puntos periódicos densos.** Se dice que una función tiene puntos periódicos densos si para cualquier condición inicial existe otra arbitrariamente próxima que es periódica. Esta propiedad implica que existen infinitas soluciones periódicas inestables asociadas a un atractor extraño, de modo que las órbitas que entran en el atractor se acercan a dichas soluciones periódicas y permanecen en sus proximidades hasta que su naturaleza inestable hace que las órbitas escapen hacia otra solución periódica.

Resulta interesante comprobar cómo sistemas aparentemente sencillos muestran este tipo de propiedades, comportándose de modo caótico pese a la simplicidad de su formulación. La ecuación logística discreta por ejemplo, puede escribirse como $x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, y pese a su aparente sencillez muestra un comportamiento caótico para valores de a mayores de 3.5699, el llamado Punto de Feigenbaum. Sin embargo en sistemas autónomos continuos el comportamiento caótico sólo aparece para tres o más dimensiones (BAKER y GOLLUB, 1994: 3). Esto se debe

al Teorema de Poincaré-Bendixson, que garantiza la no existencia de caos en sistemas autónomos planos. De hecho puede hacerse la siguiente clasificación de dimensiones mínimas para encontrar comportamiento caótico (FERNÁNDEZ PÉREZ *et al.*, 2003: 679):

- Sistemas dinámicos discretos del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ con f arbitraria: Dimensión 1. Éste es el caso de la ecuación logística discreta.

- Sistemas dinámicos discretos del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ con f invertible: Dimensión 2.

- Sistemas dinámicos continuos del tipo $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ con f arbitraria: Dimensión 3. Es importante destacar que la forma de la ecuación implica que este resultado hace referencia a sistemas autónomos sin retardos.

Sin embargo es preciso hacer una matización muy importante respecto a los sistemas continuos. Estos sistemas, como ya se ha indicado, sólo pueden presentar comportamiento caótico si contienen al menos tres variables independientes, pero en el caso de incluir retardos la situación cambia drásticamente. Este último tipo de modelos, muy empleados en dinámica de poblaciones y en la simulación de procesos psicológicos, pueden manifestar un comportamiento caótico en dimensión 1. Es decir, una ecuación de la forma $dx(t) / dt = f(x(t), x(t - \tau))$ puede exhibir todas las propiedades de los sistemas caóticos (OLSEN y DEGN, 1985). La ecuación de Mackey-Glass (ver por ejemplo LOSSON *et al.*, 1993) que se muestra en la figura 4.6 pertenece a este tipo de modelos.

Pero también existen versiones con retardo de los modelos de difusión que se estudiarán más adelante. Por ejemplo existe una versión de la ecuación logística que incluye estos efectos (SCHAFER y KOT, 1986: 160):

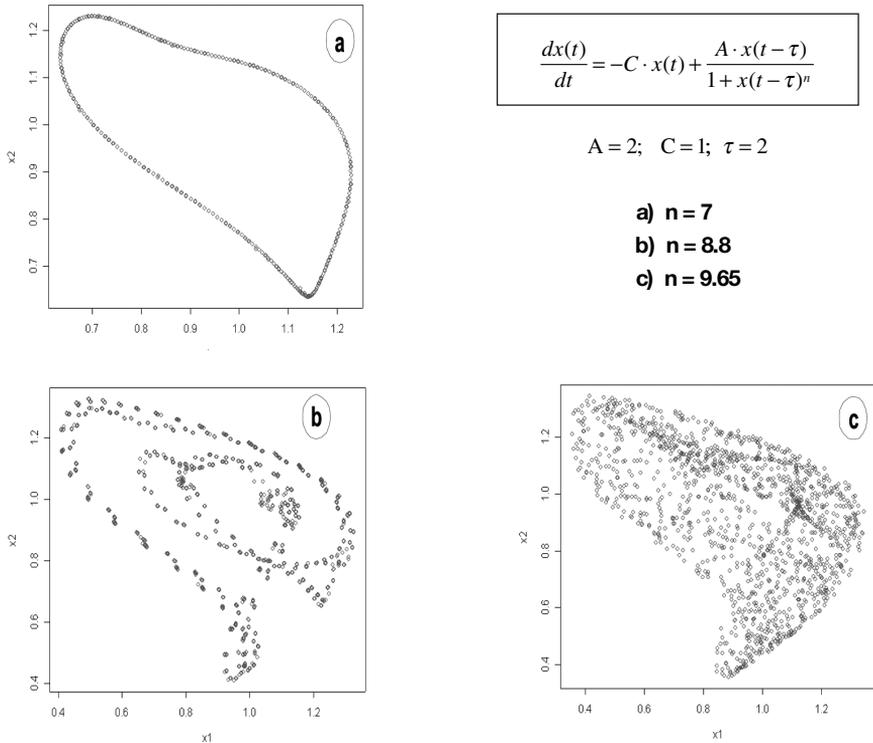
$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t) \cdot (1 - x(t - \tau))$$

Aunque este modelo sólo admite como soluciones puntos fijos y ciclos límite, otros modelos relacionados sí que presentan comportamiento caótico. MAY (1980) desarrolló un modelo sobre la evolución de la población de ballenas que presenta ciertas similitudes con el anterior.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -D \cdot x(t) + B \cdot x(t - \tau) \cdot (1 - x(t - \tau))^Z$$

Esta ecuación para $Z < 2 \cdot [(B / D) - 1]$ siempre tiene como solución un punto fijo con independencia del valor de τ . Sin embargo para valores $D = 1$, $\tau = 2$ y $B = 2$, exhibe una pauta de duplicación de perí-

FIGURA 4.6

COMPORTAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE MACKEY-GLASS PARA DISTINTOS VALORES DE UNO DE SUS PARÁMETROS⁵

Fuente: Elaboración Propia (algoritmo programado en «R»).

odos a medida que se incrementa el valor de Z , llegando a comportarse de forma aparentemente caótica para ciertos valores de este parámetro. A partir de dichos valores, un incremento de Z lleva de nuevo al sistema a una solución periódica relativamente sencilla. Aunque matemáticamente resulta interesante conocer sus propiedades, la estimación de los parámetros con datos reales sitúa al sistema en la zona en la que existe únicamente un punto fijo, de modo que el modelo no predice fluctua-

⁵ Debido a la simplicidad de la ecuación se ha optado por la resolución numérica mediante el algoritmo de Euler con paso 0.01 (para sistemas más complejos se emplearán métodos más avanzados). Aunque las órbitas son continuas, se ha decidido representar los puntos que corresponden a cada uno de los pasos del algoritmo, puesto que para valores altos del parámetro, el dibujo de las trayectorias continuas hacía sumamente confusa la imagen. Dado que sólo se pretende poner de manifiesto el comportamiento cualitativo de la ecuación, y asumiendo el error que supone dibujar un mapa de fases de un sistema continuo mediante una secuencia de puntos, pensamos que esta representación resulta más ilustrativa.

ciones irregulares cuando es aplicado al problema real de la evolución de la población de ballenas.

Por último es preciso mencionar que en ocasiones pueden emplearse ecuaciones integrodiferenciales (MURRAY, 2002: 14; BRAUER y CASTILLO-CHÁVEZ, 2001: 109-113) que permiten incorporar el efecto de todo el comportamiento pasado. Puede servir de ejemplo una modificación de la ecuación logística:

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t) \cdot \left(1 - \frac{1}{k} \cdot \int_{-\infty}^t w(t-s) \cdot x(s) \cdot ds \right)$$

En este caso no sólo se incorpora el efecto de la variable x con un determinado retardo, sino que se considera todo el comportamiento pasado de dicha variable, ponderado por una función de peso $w(t)$. Típicamente esta función de ponderación tenderá a cero para valores muy grandes tanto positivos como negativos y alcanzará su máximo en un determinado momento τ . Propuestas similares existen en el caso de sistemas dinámicos de orden superior, como por ejemplo en los modelos depredador-presa de tipo Lotka-Volterra (ver DAVIS, 1962: 413).

Éste es un caso general que incluye como casos particulares las ecuaciones diferenciales con retardo, ya que si se considera como función de pesos la delta de Dirac se obtiene de forma inmediata una ecuación de este último tipo, puesto que:

$$\int_{-\infty}^t \delta(t-\tau-s) \cdot x(s) \cdot ds = x(t-\tau)$$

5. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

La resolución analítica de una ecuación diferencial ordinaria no lineal es habitualmente bastante complicada, y en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales (como los que se tratarán en el capítulo VI) la resolución analítica es imposible en la mayoría de los casos. Por este motivo es preciso emplear métodos numéricos de resolución que convenientemente programados proporcionen la solución de la ecuación o sistema de ecuaciones.

El planteamiento de este tipo de métodos es el siguiente: sea el problema de valor inicial $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, del que suponemos que tiene solución única $\psi(t)$ donde $t_0 \in (a, b)$ y f es una función continua

en $[a, b]$. Los métodos numéricos proporcionarán una secuencia de valores $\{t_j, x_j\}$ tal que el valor x_j constituye una aproximación al valor de la solución en el punto t_j .

A continuación se presentarán los principales métodos numéricos que se emplean en la simulación de sistemas dinámicos, de modo que se estudiarán sus características e implementación, así como sus ventajas e inconvenientes. El análisis se centrará en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que los modelos que trataremos en este libro son de este tipo.

A) El Método de la Serie de Taylor

Es uno de los métodos más antiguos de resolución de ecuaciones diferenciales, y está basado en el desarrollo en Serie de Taylor, por lo que es preciso suponer que existen varias derivadas parciales de $f(t, x)$. El algoritmo iterativo se escribe del siguiente modo:

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!} x''(t) + \frac{h^3}{3!} x'''(t) + \dots + \frac{h^k}{k!} x^{(k)}(t)$$

El valor inicial de x viene dado por las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y las derivadas de x se calculan a partir de $f(t, x)$, puesto que al ser $x' = f(t, x)$, la segunda derivada la obtenemos como $x'' = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)$ y así sucesivamente. Es preciso notar que como x es una función que depende de t , será necesario aplicar la regla de la cadena para el cálculo de las derivadas de $f(t, x)$. El parámetro h es el paso que utiliza el algoritmo para ir incrementando el valor de t , de modo que a valores de h más pequeños se obtendrá una mayor precisión a cambio de un incremento del coste computacional.

Además del error de redondeo como consecuencia de la precisión computacional (número de dígitos almacenados), se comete un error de truncamiento que depende del valor k elegido, quedando definido del siguiente modo:

$$E_k = \frac{1}{(k+1)!} h^{k+1} x^{(k+1)}(t+\theta h) \text{ siendo } 0 < \theta < 1$$

La principal ventaja de este procedimiento es su sencillez conceptual, así como el hecho de que en aquellos casos en los que es sencillo calcular las derivadas de $f(t, x)$ puede usarse un método de orden elevado logrando una gran precisión en los resultados. Respecto a sus incon-

venientes está la necesidad de que existan dichas derivadas parciales además del trabajo preliminar de cálculo, que puede ser laborioso en muchos casos.

B) El Método de Euler

Presenta la ventaja de no tener que calcular las derivadas de $f(t, x)$, aunque a cambio sea preciso trabajar con unos pasos muy pequeños para lograr una buena precisión, lo que incrementa el coste computacional del algoritmo. Su expresión formal es la siguiente:

$$x(t+h) = x(t) + h \cdot f(t, x(t))$$

En problemas sencillos este método puede resultar útil, aunque para sistemas algo complejos no es una aproximación válida: el tiempo de cálculo requerido sería excesivamente grande.

C) Los métodos de Runge-Kutta

Como hemos visto, el método de Taylor requiere cálculos previos que pueden resultar muy laboriosos mientras que el método de Euler obliga a trabajar con valores de h muy pequeños. Los métodos de RUNGE (1851-1927) y KUTTA (1867-1944) solucionan en parte estos problemas, lo que los convierte en uno de los métodos más empleados. Su expresión formal es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=0}^p w_i k_i$$

siendo p el orden del método y w_i constantes. Las k_i se calculan de manera sucesiva del siguiente modo:

$$k_i = h \cdot f \left(t_n + \alpha_i h, x_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right) \text{ siendo } \alpha_1 = 0, \text{ es decir:}$$

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(t_n + \alpha_2 h, x_n + \beta_{21} k_1)$$

....

$$k_p = h \cdot f(t_n + \alpha_p h, x_n + \beta_{p1} k_1 + \beta_{p2} k_2 + \dots + \beta_{p(p-1)} k_{p-1})$$

El cálculo de los α_i , β_{ij} y w_i se realiza desarrollando en serie de Taylor x_{n+1} e identificando coeficientes de h en la ecuación $x_{n+1} = x_n + \sum_{i=0}^p w_i k_i$.

a) *Runge-Kutta de segundo orden* ($p = 2$)

Se trata del método de Runge-Kutta más simple, y en general ya proporciona resultados razonables para problemas que no resulten excesivamente complejos. Existen varias posibilidades en función del valor de α_2 que se elija:

- **Método de Euler modificado** ($\alpha_2 = 1/2$)

$$x_{n+1} = x_n + hf \left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f_n \right)$$

- **Método de Heun** ($\alpha_2 = 1$)

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f_n + f(t_n + h, x_n + hf_n))$$

- **Método óptimo** ($\alpha_2 = 2/3$)

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4} f_n + \frac{3}{4} hf \left(t_n + \frac{2}{3} h, x_n + \frac{2}{3} hf_n \right)$$

Los métodos de Runge-Kutta de orden superior se calculan de igual forma, obteniéndose distintas posibilidades en función de la elección de parámetros. Para orden 3 tenemos por ejemplo los métodos de Nyström, clásico, de Heun y el cuasi óptimo. Para orden 4 el método clásico y el de Kutta. Los coeficientes correspondientes a estos métodos son tediosos de calcular por lo que no se entrará en los detalles técnicos, pero una vez hallados su programación resulta muy sencilla.

b) *Runge-Kutta de cuarto orden* ($p = 4$)

Probablemente el método de Runge-Kutta más empleado es el de orden 4 que se detalla a continuación:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$$

Siendo

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \cdot f(t_n, x_n) \\
 k_2 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
 k_4 &= h \cdot f(t_n + h, x_n + k_3)
 \end{aligned}$$

Este método tiene un error total de orden $O(h^4)$, siempre y cuando la solución tenga las cinco primeras derivadas continuas. Con este algoritmo se obtienen unos resultados bastante buenos incluso para problemas relativamente complejos, al tiempo que su implementación resulta muy sencilla en cualquier lenguaje de programación:

Entrada: Función $f(t, x)$ y valores iniciales t_0 y x_0 .

Paso 1: Hacer $t = t_0$ y $x = x_0$.

Paso 2: Para $n = 1, 2, \dots, m$

- Calcular k_1, k_2, k_3 y k_4 .

$$k_1 = h \cdot f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(t_n + h, x_n + k_3)$$

- Calcular $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$ y $t_{n+1} = t_n + h$.

Salida: Array (t, x)

D) Otros métodos

Existen otros métodos alternativos, como los multipaso que consideran la información recibida desde el principio de la integración, es decir, para calcular la solución en el punto $n+1$ requieren información no sólo del punto n sino también de uno o más puntos anteriores. Entre

ellos destacan los métodos de Adams-Bashforth (especialmente los de segundo y cuarto orden) y los métodos predictor-corrector (como por ejemplo el trapezoidal modificado, el de Adams-Bashforth-Moulton y el de Milne).

6. CONCLUSIONES

De este capítulo también merece la pena destacar tres ideas básicas:

- Podemos definir un sistema dinámico como un conjunto de elementos caracterizados por una serie de variables que se relacionan entre sí mediante ecuaciones matemáticas, siendo el objetivo determinar la evolución temporal de dichas variables.

- El carácter interdisciplinar de los conceptos, modelos y principios de la Teoría de Sistemas Dinámicos permite modelar sistemas muy diversos. En concreto se trata de una herramienta especialmente útil para estudiar los mercados de redes debido a su capacidad para representar procesos realimentados.

- La resolución analítica de los sistemas dinámicos es imposible en la mayoría de los casos. Por este motivo es preciso emplear métodos numéricos de resolución que convenientemente programados proporcionen la solución de la ecuación o sistema de ecuaciones. Existen softwares comerciales que permiten hacerlo, aunque resulta relativamente sencillo programar los algoritmos en un lenguaje estándar como «C», «Fortran» o «R».

CAPÍTULO V

MODELOS UNIDIMENSIONALES (DIFUSIÓN)

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es desarrollar una revisión de los distintos modelos de difusión tecnológica compatibles con la evolución de un producto de red. La mayoría de los modelos tratados son sistemas unidimensionales de tipo autónomo, y como se comprobará a lo largo del capítulo, algunos de ellos pueden exhibir un comportamiento caótico por ser de tipo integrodiferencial / con retardos. Se realizará una revisión de los modelos más importantes, aunque sin entrar demasiado en cada uno de ellos. De este modo el lector dispondrá de una visión general y podrá, si lo desea, profundizar recurriendo a la bibliografía correspondiente.

1. INTRODUCCIÓN

La difusión de innovaciones, que puede definirse como la diseminación de una nueva idea desde su fuente de creación hasta los usuarios finales (ROGERS, 1962: 76), es sin duda uno de los elementos característicos de la sociedad actual, de modo que si bien se trata de un tema que lleva siendo estudiado desde hace mucho tiempo, sigue estando en plena vigencia. Los modelos matemáticos desarrollados para representar procesos de difusión tecnológica son cada vez más elaborados y complejos, pero es posible distinguir dos grandes grupos. Los primeros consideran no sólo la difusión temporal sino también la espacial, es decir, incluyen en sus ecuaciones términos que expresan cómo se difunde la

tecnología en el tiempo y en el espacio. La expresión general de una ecuación de difusión de este tipo es la siguiente (FIEDLER y SCHEEL, 2000: 24):

$$\partial u / \partial t = D \cdot \Delta u + f(\bar{x}, u, \nabla u)$$

Siendo u la cuota de mercado de la tecnología, y \bar{x} un vector que representa las dimensiones espaciales consideradas. Esta ecuación es empleada con profusión en disciplinas tan distintas como la física, las matemáticas, la química o la ingeniería, y existen también algunas aplicaciones al ámbito de la economía.

El segundo tipo de modelos constituye una versión simplificada en la que se considera únicamente la dimensión temporal, y éste será el tipo de modelos en el que se centrará este capítulo. En el caso de considerar únicamente la dimensión temporal las ecuaciones correspondientes quedarían expresadas del siguiente modo:

$$\frac{du}{dt} = f(u) \quad \text{Sistemas autónomos}$$

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad \text{Sistemas no autónomos}$$

Estas formulaciones permiten una cantidad ingente de modelos alternativos, pero la propia naturaleza de las Externalidades de Red sugiere algunas condiciones que limitan el número de modelos a estudiar. Por ejemplo, tal y como se ha mencionado anteriormente, la evolución típica de una tecnología sujeta a Efectos de Red es de tipo sigmoïdal o en «s». Por este motivo el presente capítulo se dedicará a analizar modelos de difusión con este tipo de evolución temporal, obviando aquéllos como el exponencial (FOURT y WOODLOCK, 1960) o el Mitcherlich que no presentan dicho comportamiento.

Por otra parte, aunque la revisión que se desarrolla en este capítulo tratará los modelos más relevantes, se prestará especial atención al logístico y sus numerosas variantes por varios motivos:

1. **Su formulación es sencilla y sus propiedades bien conocidas.** Además el ajuste de la función a los datos es relativamente simple y no requiere, en muchos casos, recurrir a cálculos laboriosos.

2. **Muchos de los modelos de difusión se relacionan con el modelo logístico básico.** Adicionalmente se han desarrollado una gran cantidad de variantes del mismo y la flexibilidad que muestran mediante el ajuste de distintos parámetros permite representar procesos de difusión de forma muy adecuada.

3. **La generalización a modelos de competencia está basada en muchos casos en la curva logística o sus variantes**, como ocurre por ejemplo con el modelo de Lotka-Volterra.

2. MODELOS DE DIFUSIÓN DE TIPO SIGMOIDAL: ELEMENTOS BÁSICOS

En lo que se refiere a la aparición de los modelos de difusión, KUZNETS (1930) fue el primero en proponer una evolución temporal de tipo sigmoidal para el proceso de cambio tecnológico, aunque desde ese momento numerosos estudios han confirmado dicha hipótesis. En la actualidad, los modelos de ciclo de vida, muy relacionados con los de difusión (MARTÍN-CARRILLO, 2000: 70-72), así como los modelos de difusión propiamente dichos se emplean con profusión en múltiples ámbitos de estudio como la Dirección Estratégica, la Dirección de la Producción, la Economía Industrial o el Marketing (NIETO ANTOLÍN, 1997).

Es frecuente asumir que la distribución no acumulada de frecuencias correspondiente a un proceso de difusión que siga una evolución temporal de tipo sigmoidal es aproximadamente normal (BELLO ACEBRÓN, 1984), siendo posible distinguir entre cinco grupos de usuarios en función de su propensión a adquirir el producto innovador (ROGERS, 1962: 168-171): innovadores, primeros adoptantes, mayoría precoz, mayoría tardía y rezagados (ver Figura 5.1). Y de hecho esta clasificación sigue empleándose en la actualidad (ver por ejemplo el estudio empírico sobre la difusión de juegos on-line en Taiwan de CHENG *et al.*, 2004). No obstante, como señalan MAHAJAN *et al.*, (1990b), esta hipótesis resulta cuestionable en la práctica, de modo que se han desarrollado otras distribuciones para la clasificación de adoptantes, como la propuesta por PETERSON (1973) o la de MAHAJAN y PETERSON (1985) que se muestra en la figura 5.2.

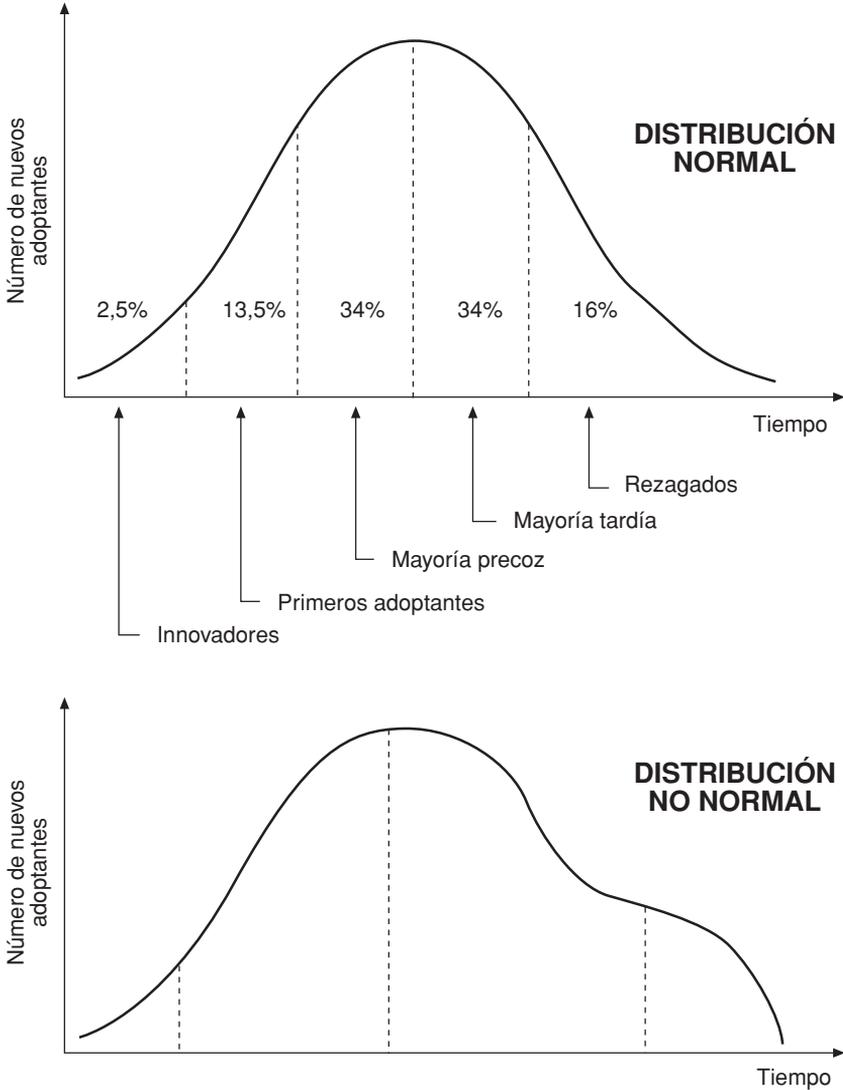
La estructura general de los modelos de difusión es la propuesta por MAHAJAN y PETERSON (1978a) y MAHAJAN y MULLER (1979), que identifica tres segmentos de mercado diferentes:

- **Mercado sin explotar:** $S_1(t) = P(t) - \tilde{N}(t)$, siendo $P(t)$ el número total de individuos en el mercado. Representa por tanto un conjunto de individuos que por diversas razones no puede ser considerados como mercado potencial.

- **Mercado potencial:** $S_2(t) = \tilde{N}(t) - N(t)$, siendo $\tilde{N}(t)$ el mercado potencial total.

- **Mercado actual:** $N(t)$ el número de usuarios que ya han adoptado la tecnología.

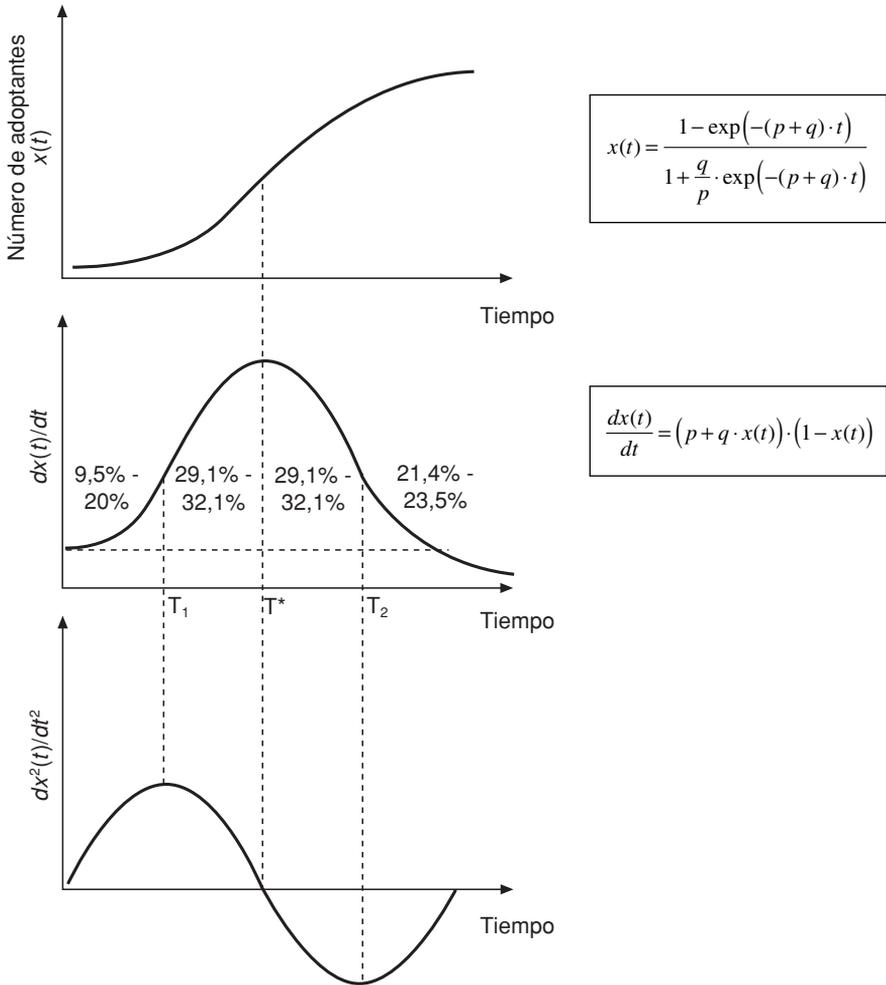
FIGURA 5.1
 CATEGORÍAS DE ADOPTANTES PARA UN PROCESO
 DE DIFUSIÓN DE TIPO SIGMOIDAL SEGÚN ROGERS (1962: 162)



Fuente: Adaptado de ROGERS (1962: 162).

El número de individuos en uno u otro segmento variará a lo largo del tiempo, pero obviamente en cualquier instante t se verifica que $S_1(t) + S_2(t) + N(t) = P(t)$. Llamando $\tilde{n}(t)$ al número de individuos que pasan del mercado sin explotar al mercado potencial en el instante t , $n(t)$ al

FIGURA 5.2
DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS NO ACUMULADAS
PARA UN PROCESO DE DIFUSIÓN SEGÚN EL MODELO DE BASS



Fuente: MAJAN *et al.*, (1990b).

número de individuos que pasan del mercado potencial a adquirir la tecnología y $p(t)$ al incremento del mercado total, tenemos que:

$$S_1(t+1) = S_1(t) + p(t) - \tilde{n}(t)$$

$$S_2(t+1) = S_2(t) + \tilde{n}(t) - n(t)$$

$$N(t+1) = N(t) + n(t)$$

3. MODELOS DE DIFUSIÓN DE TIPO SIGMOIDAL: UNA REVISIÓN TEÓRICA

En este apartado se tratarán varios tipos de modelos:

- **Modelos no lineales.** Del tipo $x(t) = f(t)$, siendo $f(t)$ una función no lineal.

- **Modelos linealizados.** Del tipo $f(x(t)) = a + b \cdot t$. El término linealizado, como es usual en Econometría, hace referencia a la variable dependiente t , puesto que en general f no será lineal. El atractivo de este enfoque es facilitar la estimación de parámetros, que en ese caso puede hacerse mediante una regresión lineal (MEADE y ISLAM, 1998). Muchos de estos modelos son una versión de los modelos no lineales.

- **Modelos Autorregresivos.** Del tipo $x(t) = f(x(t - 1))$. Al igual que en el caso de los linealizados, muchas veces se trata de adaptaciones de algunos de los modelos no lineales. La ventaja de este planteamiento es que se simplifican los cálculos numéricos.

Por otra parte los modelos pueden ser de tres tipos: **simétricos** si su punto de inflexión se alcanza cuando el número de adoptantes llega al 50 por 100, **asimétricos** en caso contrario y **flexibles** si, dependiendo del valor de sus parámetros, su punto de inflexión se ubica en un rango de valores que comprende el 50 por 100, pudiendo comportarse por tanto como simétricos y asimétricos.

La mayoría de los modelos que se estudiarán son Sistemas Autónomos, dado que su estructura es $dx(t)/dt = f(x(t))$, aunque también se tratará alguno no autónomo como el Modelo Stanford que presenta una estructura del tipo $dx(t)/dt = f(x(t), t)$.

Por tanto, como puede verse, es posible clasificar los distintos modelos según criterios muy distintos:

- Según su **especificación funcional**: no lineales, linealizados y autorregresivos.

- Según las **dimensiones** consideradas: temporales o espaciotemporales.

- Según su **forma**: simétricos, asimétricos y flexibles.

- Desde un punto de vista **matemático**: autónomos y no autónomos.

- Según su **estructura**: de tipo logístico, de tipo logístico generalizado, de tipo estadístico, etc. (ver por ejemplo la clasificación de MARTÍN-CARRILLO, 2000).

- Etc.

Incluso es posible proponer otros criterios de clasificación, como por disciplina en la que surge el modelo, por número de parámetros que incluye, etc. En la práctica resulta complicado elegir una clasificación que resulte idónea, de modo que cada investigador opta por aquella que le parece más adecuada o simplemente no se proporciona clasificación alguna. En este libro plantearemos una clasificación basada en el número de parámetros y las relaciones entre los modelos. Más adelante se detallarán las ventajas de este enfoque.

Veamos ahora cuáles son las características de los modelos más relevantes de difusión tecnológica, para proceder posteriormente a su clasificación.

A) Modelo Gompertz

En 1825, GOMPERTZ introdujo una familia de funciones capaces de representar el crecimiento demográfico en una determinada región, sustentado en la hipótesis de que se produce un crecimiento exponencial del número de muertes entre la madurez sexual y la vejez (OLSHANSKY y CARNES, 1997). Este modelo y sus distintas variantes han sido usados desde entonces con profusión en biología y campos afines, publicándose en la actualidad numerosos trabajos basados en ellos.

Su aplicación a la modelización de procesos de difusión de innovaciones ha dado lugar a la aparición de distintas investigaciones que han demostrado la utilidad de dicho modelo, como por ejemplo los trabajos de FRANSES (1994) y MORRISON (1996). De hecho junto con el logístico ha sido de los más empleados para el estudio de los procesos de crecimiento (RAESIDE, 1988).

El modelo matemático supone que la velocidad de difusión depende del número de adoptantes en cada momento $x(t)$ y de la diferencia de logaritmos entre el número máximo de potenciales usuarios, N , y el número de adoptantes:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot [Ln(N) - Ln(x(t))] = \beta \cdot x(t) \cdot Ln \frac{N}{x(t)}$$

También, al igual que ocurre con el resto de modelos, es posible expresar la ecuación en tanto por uno, lo que elimina la necesidad de trabajar con la constante N . En adelante éste será el criterio que se adopte en la mayoría de los casos para escribir las ecuaciones.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot Ln \frac{1}{x(t)}$$

Al contrario de lo que ocurre en el modelo logístico, la velocidad de difusión no es simétrica, sino que alcanza su máximo cuando el número de adoptantes es N/e ($1/e$ si lo expresamos en tanto por uno), siendo e la base de los logaritmos neperianos (aproximadamente 2.718), de modo que el punto de inflexión de la curva no se alcanza en el punto medio. Esto se comprueba fácilmente hallando el máximo de la velocidad de difusión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\beta \cdot x(t) \cdot \text{Ln} \frac{N}{x(t)} \right] = \beta \cdot \text{Ln} \frac{N}{x(t)} - \beta \cdot x(t) \cdot \frac{x(t)}{N} \cdot \frac{N}{x(t)^2} = \\ &= \beta \cdot \left[\text{Ln} \frac{N}{x(t)} - 1 \right] = 0 \\ \text{luego } x(t) &= \frac{N}{e} \end{aligned}$$

Calculando la segunda derivada se verifica que efectivamente se trata de un máximo.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\beta \cdot \left[\text{Ln} \frac{N}{x(t)} - 1 \right] \right] = -\beta \cdot \frac{x(t)}{N} \cdot \frac{N}{x(t)^2} = -\frac{\beta}{x(t)} \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]_{x=\frac{N}{e}} &= -\frac{\beta \cdot e}{N} < 0 \quad \Rightarrow x = \frac{N}{e} \quad \text{Es un máximo} \end{aligned}$$

Por tanto la curva definida por la ecuación de Gompertz inicialmente crece más deprisa que la logística. La resolución de la ecuación diferencial resulta relativamente sencilla efectuando el cambio de variable $u = \text{Ln}(N/x)$. Derivando se obtiene que $du = -(1/x) \cdot dx \Rightarrow dx = -x \cdot du$. Por otra parte la ecuación de Gompertz puede escribirse como $dx = \beta \cdot x \cdot \text{Ln}(N/x) \cdot dt$, y combinando ambas expresiones tenemos que $du = -\beta \cdot u \cdot dt \Rightarrow u = e^{-\beta \cdot t + k}$, con lo que la solución a la ecuación diferencial queda:

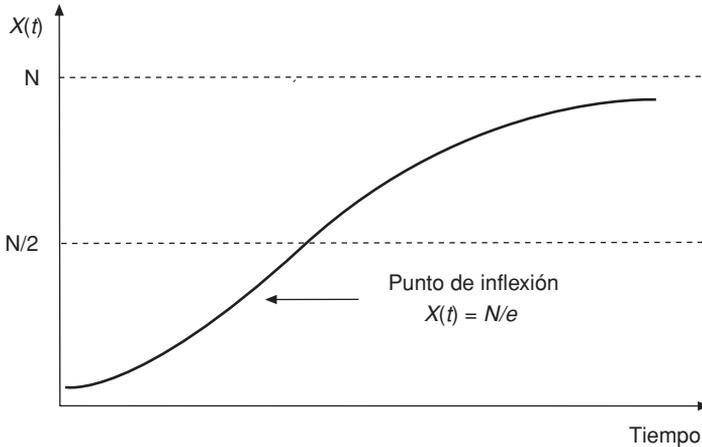
$$x(t) = N \cdot e^{-e^{-\beta t + k}}$$

O expresado en tanto por uno:

$$x(t) = e^{-e^{-\beta t + k}}$$

La figura 5.3 muestra gráficamente la evolución temporal que proporciona el modelo Gompertz de difusión.

FIGURA 5.3
 MODELO GOMPERTZ BÁSICO



Fuente: Adaptado de MARTÍN-CARRILLO (2000: 106).

La versión lineal de la ecuación de Gompertz (que se calcula de forma trivial tomando logaritmos), ha sido empleada por ejemplo por YOUNG (1993) y se expresa del siguiente modo:

$$\text{Ln}[-\text{Ln}(x(t))] = a + b \cdot t$$

Existen versiones revisadas que incorporan un mayor número de parámetros para incrementar su flexibilidad, como por ejemplo el propuesto por WEISSTEIN (1999: 748):

$$x(t) = a \cdot b^{-a^t}$$

En esta misma línea el modelo de Gompertz generalizado (LEE *et al.*, 1992) cuenta con cuatro parámetros, de modo que la ecuación final de evolución viene dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = \exp\left[-\exp\left[-\left((\alpha + \beta \cdot t)^{1/\lambda} + \gamma\right)\right]\right]$$

Haciendo $\lambda = 1$ y $\gamma = 0$ se obtiene el Gompertz básico.

Este planteamiento supone que, dentro de la estructura general de MAHAJAN y MULLER que se analizaba al principio del capítulo, no se produce una variación a lo largo del tiempo del mercado potencial puesto que N permanece constante. En este sentido CHOW (1967) propuso una

modificación del modelo permitiendo que el mercado potencial creciese con el tiempo, es decir, haciendo $N = N(t)$ y expresándolo como una regresión lineal doblemente logarítmica con dos variables independientes. Análogamente STONEMAN (1983: 70) modificó el planteamiento clásico haciendo $\beta = \beta(t)$, de modo que la solución a la correspondiente ecuación diferencial quedaría:

$$x(t) = e^{-e^{-\int \beta(t) dt}}$$

Por último indicar que existe una versión autorregresiva para el modelo de Gompertz, que viene dada por la siguiente expresión:

$$x(t) - x(t-1) = -b \cdot x(t-1) \cdot \text{Ln}(x(t))$$

$$b > 0$$

B) Modelo Gaussiano

Como se mencionaba al principio del capítulo, la distribución no acumulada de frecuencias de un proceso de difusión tecnológica se considera en muchos casos como aproximadamente normal, y por este motivo es lógico emplear un modelo de difusión que emplee precisamente una distribución Gaussiana, tal y como propone ROGERS (1962: 160-162). La velocidad de difusión del proceso viene dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Siendo μ la media y σ^2 la varianza del proceso. El porcentaje total de usuarios en un instante t determinado vendrá dado por la siguiente integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

Esta expresión tiene su punto de inflexión en $t = \mu$, siendo por tanto un modelo simétrico. Al igual que ocurría con el modelo Gompertz, es posible emplear una versión linealizada como hace STAPLETON (1976).

Aunque como señala MAR-MOLINERO (1980) este tipo de curvas pueden ser útiles para representar procesos de difusión, el interés para el caso que nos ocupa es limitado por varios motivos:

- La interpretación del modelo en términos de Externalidades de Red no es sencilla. Mientras que en otros modelos como el Logístico o Gompertz la ecuación diferencial presenta una estructura fácil de interpretar, no ocurre lo mismo con el modelo Gaussiano.

- Los resultados son similares a los obtenidos con el modelo Logístico, pero los cálculos son significativamente más complejos debido a que no existe primitiva de la integral indicada. Esto hace necesario emplear las tablas normalizadas que aparecen en los manuales de estadística (para la Gaussiana tipificada) o bien recurrir a la integración numérica.

C) Modelo Log-Normal

El modelo Log-Normal, usado por ejemplo por BAIN (1963), parte de una expresión similar al Gaussiano:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{t \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln(t) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

De modo que el porcentaje de usuarios en un momento determinado vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln(y) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] dy$$

Es preciso indicar que en este caso el límite inferior de integración es cero, puesto que el logaritmo no está definido para valores negativos. Por otra parte el punto de inflexión de la curva se produce en el punto $\exp(\mu - \sigma^2)$, de modo que presenta una mayor versatilidad que el modelo Gaussiano a la hora de representar una serie de datos reales, siendo de hecho un modelo flexible. No obstante, en lo que se refiere al presente trabajo, no constituye un modelo demasiado interesante, puesto que adolece de los mismos problemas que el Gaussiano.

CH) Modelo Weibull

La aplicación de este modelo flexible a un proceso de difusión fue propuesta en primera instancia por SHARIF e ISLAM (1980) y, análogamente a los modelos Gaussiano y Log-Normal, está basado en una función de tipo estadístico. En este caso la velocidad de difusión viene dada por la ecuación.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad \alpha, \beta, t > 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene de manera relativamente sencilla la siguiente expresión para el número de adoptantes en un momento determinado:

$$x(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad t, \alpha, \beta > 0$$

Los dos parámetros del modelo determinan una familia de curvas que puede aplicarse a gran cantidad de productos tecnológicos (KANG *et al.*, 1996), ya que se trata de un modelo flexible. E incluso son posibles formulaciones más sofisticadas con tres parámetros que la dotan de una mayor versatilidad:

$$x(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)^\beta\right] \quad t, \tau, \alpha, \beta > 0$$

Lo interesante de este último modelo es que se incorpora el concepto de retardo a través del parámetro τ ; efectivamente la especificación funcional de esta ecuación implica que existe una relación entre el número de adoptantes y la situación en un tiempo pasado definido por $t - \tau$. Ésta es una idea relevante que será empleada con posterioridad.

Además de la aplicación al caso que nos ocupa, los modelos de Weibull se han empleado en infinidad de problemas de la más variada índole, tanto en ingeniería y física como en ciencias sociales. En el manual de MURTHY *et al.*, (2004: 13) puede encontrarse un exhaustivo listado de trabajos basados en esta distribución.

D) Modelo Log-Recíproco

Se trata de un modelo de difusión relativamente sencillo usado por ejemplo por MCCARTHY y RYAN (1976), y que se representa mediante las siguientes ecuaciones:

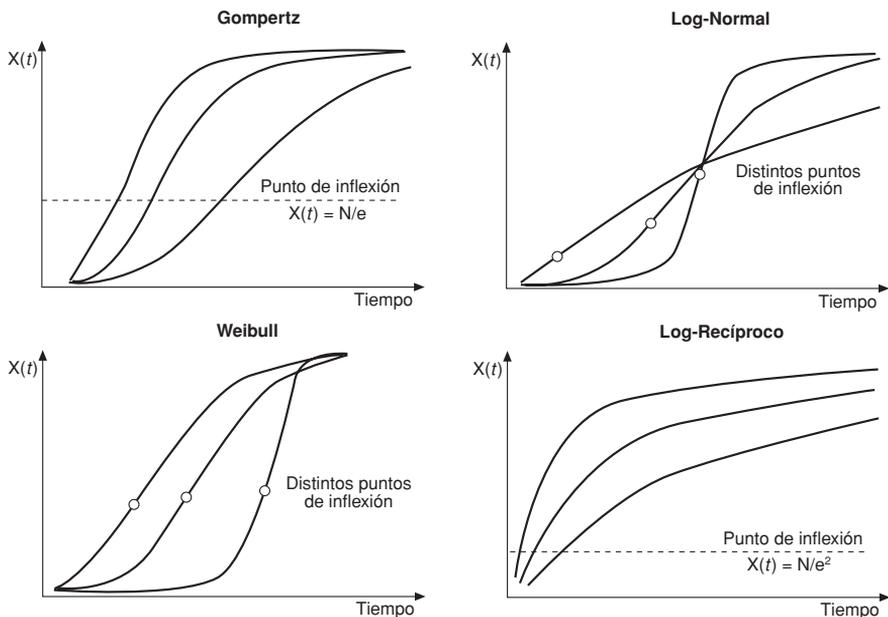
$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{b \cdot t^2} \exp\left[-\frac{1}{b \cdot t}\right] \quad b > 0$$

$$x(t) = \exp\left[-\frac{1}{b \cdot t}\right] \quad b > 0$$

En este caso, al igual que ocurría con el modelo Gompertz, existe un único punto de inflexión para toda la familia de curvas en el punto $x(t) = 1/e^2$, como puede comprobarse de forma análoga a como se hizo en el caso de la curva Gompertz, aunque en esta ocasión es preciso derivar respecto al tiempo para después sustituir en la expresión de $x(t)$. Tenemos entonces una familia de curvas asimétricas con la peculiaridad de presentar un crecimiento bastante rápido en su primer tramo, así como un cambio de concavidad muy temprano.

A modo de ejemplo, la figura 5.4 compara el comportamiento de algunas de las curvas estudiadas hasta este momento para distintos valores de sus parámetros, indicando dónde se produce el cambio de concavidad.

FIGURA 5.4
COMPORTAMIENTO DE DISTINTOS MODELOS DE DIFUSIÓN



Fuente: Adaptado de MEADE e ISLAM (1998).

E) Modelo Gamma

La distribución Gamma también puede ser empleada para modelizar procesos de difusión. La expresión de la velocidad de adopción es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x(t)^{p-1} \cdot e^{-a \cdot x(t)}$$

$$a, p > 0$$

$$x > 0$$

Donde Γ es la función de Euler definida por $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$.

Aunque para valores de p enteros positivos es posible integrar de forma analítica la ecuación diferencial, es habitual recurrir a tablas normalizadas o a la integración numérica.

La curva $x(t)$ así definida presenta una evolución temporal de tipo sigmoïdal para valores de p mayores que 1. Como ocurre con la mayoría de modelos de tipo estadístico, aunque el ajuste a los datos reales pueda ser bueno por la flexibilidad que le confieren sus parámetros, la interpretación en términos económicos no es sencilla.

F) Modelo Beta

La situación es similar al caso anterior. Eligiendo de forma adecuada el valor de los parámetros es posible lograr una evolución temporal de tipo sigmoïdal (FERNÁNDEZ-ABASCAL *et al.*, 1994: 455-458). Algunos modelos que se estudiarán más adelante como los de Jeuland o NSRL presentan una estructura muy similar a la del modelo gamma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} \cdot x(t)^{p-1} \cdot (1-x(t))^{q-1}$$

$$p, q > 0$$

$$x \in (0,1)$$

G) Modelo de Singh y Maddala

Este modelo fue propuesto por SINGH y MADDALA (1976) para estimar la distribución del volumen de ingresos de una compañía, siendo una generalización del modelo propuesto por FISK (1961) con este mismo objetivo y que a su vez se basaba en la distribución de Champernowne. No se trata por tanto de un modelo de difusión propiamente dicho, aunque como señala MARTÍN-CARRILLO (2000: 157-158) puede emplearse como tal. La formulación original de Singh y Maddala es la que se indica a continuación:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot t^{a_2-1}}{(1 + a_1 \cdot t^{a_2})^{a_3+1}}$$

$$x(t) = 1 - \frac{1}{(1 + a_1 \cdot t^{a_2})^{a_3}}$$

No obstante la interpretación de este modelo en términos de Externidades de Red también resulta complicada. Por este motivo, aunque la flexibilidad que le proporcionan sus tres parámetros permita un buen ajuste a los datos reales, no parece un buen candidato para el análisis del fenómeno que se pretende estudiar en este libro.

H) Modelo Adaptativo Polinómico

Propuesto por MARTÍN-CARRILLO (2000: 170-189), este modelo flexible presenta la ventaja de permitir una buena adaptación a muchos procesos de difusión de tecnologías, siendo la estimación de sus coeficientes relativamente sencilla.

$$\frac{dx(t)}{dt} = P_0 + 2 \cdot a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t^2 + 4 \cdot a_4 \cdot t^3$$

$$x(t) = x_0 + P_0 \cdot t + \sum_{i=2}^4 a_i \cdot t^i$$

x_0 se define como la Tecnología Latente y representa el porcentaje inicial de usuarios, mientras que P_0 se denomina Coeficiente del Efecto de la Innovación.

I) Modelo Logístico Básico

El modelo Logístico (y sus numerosas variantes) es probablemente el más empleado para la modelización de procesos de difusión, pese a las críticas que pueden hacerse a su planteamiento (ver por ejemplo SINDE CANTORNA, 2004: 28-34), y cuenta con numerosas aplicaciones en muchos otros campos, ya que por ejemplo es una de las funciones de activación más empleadas en sistemas de Redes Neuronales. Fue formulado inicialmente por VERHULST en 1838, aunque también se le conoce como modelo de Pearl, y ha sido aplicado con éxito, junto a sus diferentes variantes, en múltiples investigaciones sobre la difusión, como las de GRILICHES¹ (1957

¹ Sin embargo estos trabajos de GRILICHES fueron revisados por DIXON (1980) que demostró que la curva Gompertz resultaba una mejor aproximación debido precisamente a su asimetría.

y 1960), MANSFIELD (1961), TANNER (1978), TEECE (1980), RANDLES (1983) o POLO (1987).

Su formulación parte de un planteamiento relativamente sencillo: la velocidad de difusión de una tecnología es proporcional al número de adoptantes en el instante considerado y al número de potenciales adoptantes que aún no lo han hecho. Expresada en tanto por uno, tenemos que:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

$$\beta > 0$$

La primera parte del planteamiento recuerda a la Ley de Metcalfe, que como ya se ha mencionado propone que el valor para un usuario de conectarse a una red es proporcional al número de usuarios ya conectados (luego a más usuarios conectados mayor velocidad de difusión). La resolución de la ecuación diferencial proporciona la siguiente expresión para el número de adoptantes:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot (t - t_0))}$$

$$t_0 = -k / \beta$$

Siendo k la constante de integración a determinar según las condiciones iniciales. Por tanto t_0 es el instante en que se alcanza el 50 por 100 de la población máxima, es decir, $x(t_0) = 1/2$, mientras que β se denomina índice de expansión de la innovación y determina la velocidad con que se adopta la nueva tecnología.

La versión linealizada propuesta por MANSFIELD (1961) y posteriormente modificada por BLACKMAN (1974) presenta la siguiente estructura:

$$\text{Ln} \left(\frac{x(t)}{1 - x(t)} \right) = a + b \cdot t$$

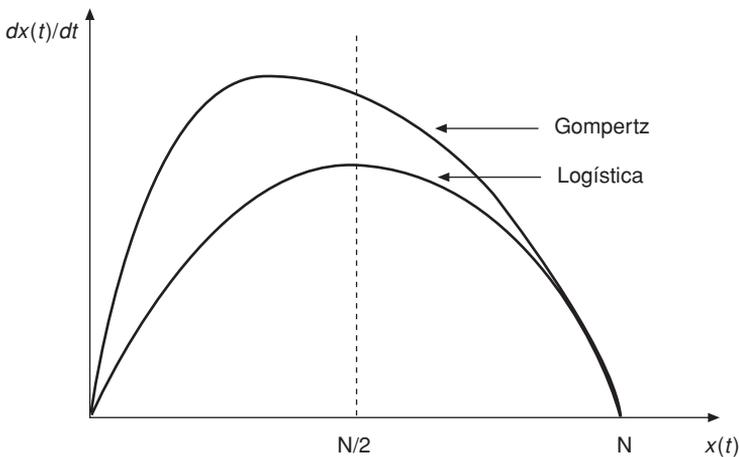
No obstante existen formulaciones alternativas que difieren únicamente en la forma de identificar cada uno de los coeficientes. Una de las más conocidas es la propuesta por FISHER y PRY en 1970, quienes plantearon una ecuación de sustitución tecnológica que realmente resultó ser exactamente la misma que la logística, como se demuestra realizando unos sencillos cambios de variable (MARTÍN-CARRILLO, 2000: 91-93). La expresión que plantearon es la siguiente:

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tgh} \left(\frac{\beta}{2} \cdot (t - t_0) \right) \right)$$

La logística es una curva simétrica, como se calcula fácilmente de forma análoga a la planteada en el modelo Gompertz, con su punto de inflexión en $x(t) = 1/2$ ($N/2$ si consideramos número de usuarios y no porcentaje). La figura 5.5 muestra una comparativa en la evolución de la velocidad de difusión de la ecuación logística y la de Gompertz.

Un detalle de suma importancia es que, aunque la formulación discreta de la ecuación logística $x_{n+1} = \alpha \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, presenta un comportamiento caótico para valores de α mayores de 3.5699, su formulación continua no tiene este comportamiento, ya que como se indicó al estudiar los sistemas dinámicos, en el caso continuo sin retardos sólo es posible hallar un comportamiento caótico para dimensión igual o mayor que tres.

FIGURA 5.5
VELOCIDAD DE DIFUSIÓN
DE LAS ECUACIONES LOGÍSTICA Y GOMPERTZ



Fuente: MARTÍN-CARRILLO (2000: 83).

J) Modelo Logístico Local

Una modificación especialmente interesante del modelo Logístico básico es la propuesta por MEADE (1988) con su denominado modelo logístico local, que introduce un esquema de tipo autorregresivo incorporando en la ecuación de predicción los valores observados en el

instante anterior. La formulación de este modelo simétrico es la siguiente:

$$x(t) = \frac{x(t-1) \cdot \exp(b)}{1 + x(t-1) \cdot (\exp(b) - 1)}$$

$$b > 0$$

ISLAM y MEADE (1996) probaron que esta formulación resulta en ocasiones más adecuada que la logística básica para realizar predicciones en entornos cambiantes.

K) Modelo Logístico de Chow

Se trata de una modificación del modelo logístico básico que pretende dotarlo de mayor flexibilidad. Como ya se mencionó al estudiar la curva de Gompertz, CHOW (1967) propuso una modificación de dicho modelo permitiendo que el mercado potencial creciese con el tiempo, es decir, haciendo $N = N(t)$. La modificación a la logística que se estudia en este apartado está enfocada de forma similar.

Como se acaba de indicar, una de las hipótesis del modelo logístico era que la constante de proporcionalidad en la ecuación diferencial, β , era precisamente constante, de modo que la idea consiste en permitir que varíe con el tiempo, siendo por tanto $\beta = \beta(t)$. La formulación del modelo es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta(t) \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(z) \cdot dz\right)}$$

En términos económicos esta variación en el tiempo de β permite incluir en el modelo los cambios en la predisposición de los potenciales usuarios a adquirir la tecnología, por lo que sin duda supone una aproximación más realista, aunque implica determinar una función para β , dificultando así la estimación del modelo. Por este motivo parece razonable emplear funciones $\beta(t)$ sencillas de integrar, como hace HERNES (1976) proponiendo una expresión del tipo $\beta(t) = k \cdot b^t$.

Empleando funciones polinómicas, que resultan muy sencillas de integrar, es posible obtener soluciones con un mayor número de pará-

metros, lo que puede contribuir a un mejor ajuste de los datos reales, quedando la expresión del número de adoptantes del siguiente modo:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\sum_{i=0}^k a_i \cdot t^i\right)}$$

L) Modelo de Paloheimo y Dickie

PALOHEIMO y DICKIE (1965) formularon una ecuación de crecimiento muy general que puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = H \cdot x(t)^d - k \cdot x(t)^n$$

La flexibilidad que le permiten sus cuatro parámetros hace que sea en realidad una de las ecuaciones más generales que puedan plantearse, ya que recoge como casos particulares la logística básica y muchos de los modelos que se estudiarán a continuación, como el de Bertalanffy y NSRL. Resulta complicado estudiar sus propiedades en términos generales, y por este motivo se analizarán en su lugar los casos particulares que se han indicado, considerando valores concretos de sus parámetros.

M) Modelo de Bass

Este modelo formulado por BASS (1969) plantea que determinados individuos adoptan una nueva tecnología por motivaciones propias, independientemente de la decisión del resto de potenciales usuarios; éstos son los llamados innovadores. El resto de adoptantes se moverían por un efecto imitación (o interpretado en términos de Externalidades de Red, porque al incrementarse el número de usuarios aumenta para ellos el valor de adquirir la tecnología). Por este motivo BASS propuso una modificación a la ecuación logística básica que recogiese ambos efectos.

El planteamiento matemático del modelo es relativamente similar al de la logística, aunque incorpora un término adicional para incluir el comportamiento de los innovadores:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))$$

$$p, q > 0$$

$$x(t) = \frac{1 - \exp(-(p+q) \cdot t)}{1 + \frac{q}{p} \cdot \exp(-(p+q) \cdot t)}$$

Por tanto el modelo puede interpretarse como la suma de dos efectos: el de los innovadores, definido por una exponencial modificada ($p \cdot (1 - x(t))$) y el de los imitadores, definido por una logística básica ($q \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$). En este sentido es interesante introducir los conceptos de coeficiente interno y externo de influencia propuestos por LEKVALL y WAHLBIN (1973). Para ello se expresará el modelo de Bass de la siguiente forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = p \cdot (1 - x(t)) + q \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

El primer término, como ya se ha indicado, refleja el comportamiento de los innovadores, e indica una conversión a porcentaje constante p . Éste es el denominado coeficiente de influencia externa o innovación. El segundo término implica una influencia de los adoptantes sobre los no adoptantes similar a un proceso de contagio, de modo que la constante de proporcionalidad q es el denominado coeficiente de influencia interna o imitación. Por tanto se asume que existen dos categorías de individuos, imitadores e innovadores, que presentan una respuesta diferente a la introducción de un nuevo producto.

No obstante algunos autores como TANNY y DERZKO (1988) sugieren que esta interpretación del modelo de Bass es incorrecta y que realmente el modelo sólo refleja la interacción entre adoptantes y no adoptantes, de modo que q no es un coeficiente de imitación para un individuo sino que refleja la intensidad de adopción como consecuencia de la interacción adoptantes–no adoptantes, al tiempo que p indica el efecto de todos los demás factores que incitan a la adopción de la tecnología, como los medios de comunicación y las políticas de venta (ISLAM *et al.*, 2002). De esta manera desaparece la dicotomía innovadores / imitadores y se sustituye por la hipótesis de una población homogénea de potenciales adoptantes.

En cualquier caso, al margen de la interpretación de los coeficientes de influencia, se trata de un modelo de tipo flexible con un punto de inflexión que está comprendido entre 0 y 0.5 dependiendo del valor de los parámetros p y q , lo que se comprueba fácilmente de forma análoga a la propuesta en el modelo Gompertz. Concretamente el cambio de concavidad se produce en el punto $x(t) = (q - p) / (2 \cdot q)$.

Sin embargo, aunque se trata de un modelo empleado en un gran número de investigaciones, tal y como señalan HEELER y HUSTAD (1980)

presenta una serie de limitaciones, como cierta inestabilidad si la estimación de sus parámetros se basa en una serie corta de datos y problemas predictivos en las primeras etapas del crecimiento.

El modelo básico presenta además el problema de que para $t = 0$ el porcentaje de adoptantes ha de ser necesariamente cero. Por ello se ha sugerido una formulación ligeramente modificada que da lugar a una ecuación que permite una población inicial no nula (MEADE e ISLAM, 1998):

$$x(t) = \frac{1 - c \cdot \frac{P}{q} \cdot \exp(-(p+q) \cdot t)}{1 + c \cdot \exp(-(p+q) \cdot t)}$$

$$p, q > 0$$

También se han desarrollado otra serie de variantes para tratar de introducir supuestos más realistas, como por ejemplo añadiendo coeficientes de influencia crecientes o decrecientes en vez de constantes (MAHAJAN *et al.*, 1990a; MARTÍN-CARRILLO, 2000: 141-143). En esta misma línea MAHAJAN y PETERSON (1978a) desarrollaron un modelo dinámico basado en el de Bass permitiendo que el número máximo de adoptantes fuese variable en vez de constante, de modo que la velocidad de difusión (en número de adoptantes) venía dada por la expresión:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (f(P(t)) - x(t))$$

Siendo f una función lineal del tipo $f(P(t)) = k_1 + k_2 \cdot P(t)$, y $P(t)$ la población máxima o mercado total que se definía en la primera parte del capítulo, que en este caso se modeliza también como una ecuación de Bass.

NORTON y BASS (1987) extendieron el modelo básico para incorporar la idea de distintas generaciones del producto compitiendo entre sí. Si se considera únicamente un modelo con dos generaciones las ecuaciones resultantes son las siguientes:

$$N_1(t) = m_1 \cdot x_1(t) \cdot (1 - x_2(t - \tau))$$

$$N_2(t) = (m_2 + m_1 \cdot x_1(t)) \cdot x_2(t - \tau)$$

Donde N_i representa el número de adopciones de la generación i -ésima (en este caso generaciones 1 y 2) en el instante t , y x_i es el porcentaje de adoptantes de cada generación, de modo que las x_i siguen un comportamiento dado por la ecuación de Bass. El parámetro τ repre-

senta el momento en que se lanzó la segunda generación del producto. Este modelo puede ser generalizado de forma sencilla al caso de tres o más generaciones sucesivas.

Una última variante elemental que merece la pena mencionar es el modelo empleado por GANESH y KUMAR (1996) y GANESH *et al.*, (1997), que partiendo del modelo de Bass introduce una pequeña modificación para considerar el efecto que tiene en la difusión tecnológica entre países el aprendizaje (recordemos la importancia de las denominadas Externidades de Red de aprendizaje):

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + c \cdot k \cdot y(t)) \cdot (1 - x(t))$$

Donde $y(t)$ es el ratio de penetración en el mercado de donde surge la innovación y $x(t)$ el ratio de penetración en el mercado donde se está introduciendo. En este caso c representa el coeficiente de aprendizaje.

A continuación se estudiarán otras variantes algo más sofisticadas del modelo de Bass básico que merecen ser analizadas de manera independiente.

N) Modelo de Bass con deserciones

BIDGES *et al.*, (1993), estudiando el número de productos que podían competir en un determinado mercado tecnológico, desarrollaron un modelo similar al de Bass, que es también aplicable a los procesos de difusión de tecnologías. La modificación consiste en incorporar un término adicional que puede ser interpretado como la tasa de deserciones, es decir, el porcentaje de adoptantes que abandonan la tecnología, quedando el modelo expresado mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= (\lambda_e + \lambda_i \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t)) - \mu \cdot x(t) \\ x(t) &= \frac{a \cdot (1 - c \cdot \exp(t \cdot b)) - b \cdot (1 + c \cdot \exp(t \cdot b))}{2 \cdot \lambda_i \cdot (1 - c \cdot \exp(t \cdot b))} \\ a &= -\lambda_e + \lambda_i - \mu \\ b &= (4 \cdot \lambda_e \cdot \lambda_i + a^2)^{1/2} \end{aligned}$$

El punto de inflexión de esta curva se encuentra en el punto $x(t) = (\lambda_i - \lambda_e - \mu) / (2 \cdot \lambda_i)$, de modo que estamos ante una curva asimétrica, puesto que $\lambda_i, \lambda_e, \mu > 0$.

El interés de este modelo radica en que incorpora la posibilidad de considerar que cierto porcentaje de usuarios decide prescindir de la tecnología tras haberla adquirido, relegando así la hipótesis implícita en el modelo de Bass de que un adoptante continúa siéndolo indefinidamente. Sin embargo en términos de Externalidades de Red probablemente sería más realista considerar una tasa de deserción decreciente en vez de constante como la que propone este modelo.

Ñ) Modelo de Bass con tres etapas

JAIN *et al.*, (1991) propusieron una modificación al modelo de Bass básico que incorporaba las restricciones en la cadena de suministros. El planteamiento consiste en asumir que existe un determinado número de usuarios que desean adquirir la tecnología y están a la espera de obtenerla debido a restricciones de abastecimiento, de modo que se identifican tres grupos de individuos dentro del modelo: potenciales adoptantes, usuarios a la espera de adquirir la tecnología habiéndola solicitado y adoptantes. La formulación en tanto por uno es la siguiente:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dx(t)}{dt} = (p + q_1 \cdot A(t) + q_2 \cdot x(t)) \cdot (1 - A(t) - x(t))$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = C(t) \cdot A(t)$$

$z(t)$: Suma del número de adoptantes y usuarios en lista de espera.

$A(t)$: Usuarios en lista de espera.

$x(t)$: Número de adoptantes

$C(t)$: Coeficiente de suministro, que relaciona el número de adoptantes y el de usuarios en lista de espera.

El interés de este modelo radica en el hecho de que como señalan ISLAM y FIEBIG (2001), en muchos casos existen restricciones en la cadena de suministros que impiden adquirir un determinado producto de forma inmediata, como ocurre por ejemplo en algunos países con el teléfono. Sin embargo este modelo de difusión está constituido por un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión dos, lo que dificulta su resolución.

O) Modelo de Bass con efectos publicitarios

SIMON y SEBASTIAN (1987) propusieron una serie de seis modelos basados en la formulación discreta del modelo de Bass para incorporar

el efecto de la publicidad en los coeficientes de influencia externa e interna. Resulta relativamente sencillo expresar en términos continuos su propuesta, quedando las siguientes expresiones:

Modelo de Innovación (se modifica el coeficiente de innovación p)

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + \alpha \cdot f(A)) \cdot (1 - x(t))$$

Modelo de Imitación (se modifica el coeficiente de imitación q)

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + \beta \cdot f(A) \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))$$

Donde $f(A)$ es una función cóncava de tipo logarítmica que depende de la publicidad realizada, A , proponiendo los autores tres especificaciones alternativas:

Modelo de un único período

$$f(A) = \gamma \cdot \text{Ln}(A(t - \tau))$$

$$\tau \geq 0$$

Modelo de varios períodos

$$f(A) = \sum_{\tau=0}^T \gamma_{\tau} \cdot \text{Ln}(A(t - \tau))$$

Modelo de Nerlove

$$f(A) = \lambda \cdot \sum_{\tau=0}^T \gamma_{\tau} \cdot \text{Ln}(A(t - \tau))$$

En el que los pesos siguen una distribución Beta, de modo que:

$$\gamma_{\tau} = \frac{(r + s - 1)!}{(r - 1)! \cdot (s - 1)!} \tau^{r-1} \cdot (1 - \tau)^{s-1}$$

La combinación de los dos modelos de Bass modificados con los tres modelos publicitarios propuestos da lugar a seis modelos diferentes. El estudio de SIMON y SEBASTIAN muestra que estas modificaciones mejoran ligeramente la predicción respecto al modelo de Bass clásico, al tiempo que confirman el retraso que se produce en la respuesta publicitaria de los consumidores.

P) Modelo de Floyd

Este modelo fue propuesto por FLOYD (1968) para representar la evolución de innovaciones industriales y presenta la siguiente estructura:

$$\frac{dx(t)}{dt} = b \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))^2 \quad b > 0$$

Siendo la solución en este caso

$$\frac{1}{1 - x(t)} + Ln\left(\frac{x(t)}{1 - x(t)}\right) = a + b \cdot t \quad b > 0$$

Como puede comprobarse la ecuación diferencial de partida es similar a la logística, aunque elevando al cuadrado el segundo término de la expresión. Se trata una curva asimétrica con punto de inflexión fijo en $x(t) = 0.33$ (MAHAJAN *et al.*, 1990a), es decir, en un punto intermedio entre el modelo de Gompertz (0.37) y el Log-Reciproco (0.135). La versión Autorregresiva del modelo queda expresada de la siguiente forma:

$$x(t) - x(t-1) = b \cdot x(t-1) \cdot (1 - x(t-1))^2$$

$$b > 0$$

Q) Modelo de Sharif y Kabir

Se trata de una combinación del modelo de Mansfield de la logística linealizada y el de Floyd, y fue propuesta por SHARIF y KABIR (1976) para la difusión de innovaciones industriales. Presenta unas propiedades similares a la curva de Gompertz (KANG *et al.*, 1996), aunque se trata de un modelo flexible y su punto de inflexión depende del valor de los parámetros, estando acotado entre 0.33 y 0.5 (MAHAJAN *et al.*, 1990a).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))^2}{1 - x(t) \cdot (1 - \sigma)}$$

$$b > 0$$

$$\sigma \in [0, 1]$$

$$\frac{\sigma}{1 - x(t)} + Ln\left(\frac{x(t)}{1 - x(t)}\right) = a + b \cdot t \quad b > 0$$

También cuenta con una versión Autorregresiva propuesta por MAHAJAN *et al.*, (1993).

$$x(t) - x(t-1) = \frac{b \cdot x(t-1) \cdot (1-x(t-1))^2}{1-x(t-1) \cdot (1-\sigma)}$$

$$b > 0$$

$$\sigma \in (0,1)$$

R) Modelo Stanford

Este modelo constituye una aproximación lineal al modelo Log-Normal, aunque también puede considerarse como una modificación del de Bass, empleando un coeficiente de influencia interna decreciente y un coeficiente de influencia externa igual a cero. Empleado por ejemplo por TEOTIA y RAJU (1986) su formulación es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{q}{t} \cdot x(t) \cdot (1-x(t))$$

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{T}{t}\right)^q}$$

Donde T es el tiempo en el que se logra la mitad de la penetración en el mercado. Se trata de un modelo flexible con su punto de inflexión entre 0 y 0.5. Obsérvese que estamos ante un sistema no autónomo.

S) Modelo de Jeuland

Modelo propuesto por JEULAND (1981) que parte de la logística de Bass pero incorporando un parámetro adicional. Se trata de un modelo flexible con su punto de inflexión acotado entre 0 y 0.5. Presenta la siguiente estructura:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (1-x(t))^{1+\gamma}$$

$$p, q > 0$$

$$\gamma > -1$$

La versión Autorregresiva puede formularse del siguiente modo:

$$x(t) - x(t-1) = (p + q \cdot x(t-1)) \cdot (1 - x(t-1))^{1+\gamma}$$

$$p, q > 0$$

$$\gamma > -1$$

De hecho haciendo $p = \gamma = 0$ se obtiene la versión Autorregresiva del modelo logístico de Mansfield, que presenta un comportamiento simétrico.

$$x(t) - x(t-1) = b \cdot x(t-1) \cdot (1 - x(t-1))$$

$$b > 0$$

Haciendo $p = 0, \gamma = 1$ se obtiene la versión Autorregresiva del modelo de Floyd, que presenta una evolución asimétrica.

$$x(t) - x(t-1) = b \cdot x(t-1) \cdot (1 - x(t-1))^2$$

$$b > 0$$

T) Modelo FLOG

Este modelo, conocido también como Logística Flexible, es una generalización de la ecuación logística básica. Propuesto por Bewley y Fiebig (1988), se trata de un modelo de cuatro parámetros que puede verse también como una ecuación del tipo logística de Chow haciendo $\beta(t) = \phi \cdot f'(\mu, k, t)$. El modelo queda expresado del siguiente modo:

$$\text{Ln} \left(\frac{x(t)}{1-x(t)} \right) = \gamma + \phi \cdot f(\mu, k, t)$$

$$\text{siendo } f(\mu, k, t) = \frac{\left[(1+k \cdot t)^{\mu/k} - 1 \right]}{\mu}$$

Despejando $x(t)$ se obtiene la expresión siguiente:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp \left[-(\gamma + \phi \cdot f(\mu, k, t)) \right]} = \frac{1}{1 + c \cdot \exp \left[-\phi \cdot f(\mu, k, t) \right]}$$

Esta expresión recuerda a la logística básica, pero incorpora una función con dos parámetros adicionales que lo dotan de mayor flexibilidad. La ecuación diferencial de la que proviene esta expresión es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \phi \cdot f'(\mu, k, t) \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$$

$$\text{donde } \int_{t_0}^t \phi \cdot f'(\mu, k, s) \cdot ds = \phi \cdot f(\mu, k, t) + \gamma$$

Se trata de un modelo flexible cuyo punto de inflexión puede tomar todos los valores entre el 0 y el 1, al tiempo que permite distintos grados de simetría para un determinado punto de inflexión (MEADE e ISLAM, 1995).

En la práctica puede resultar difícil estimar los cuatro parámetros cuando se cuenta con un número limitado de datos, de modo que habitualmente se emplean cuatro casos particulares de tres parámetros:

Transformación Box-Cox. Haciendo $k = 1$

$$f(\mu, 1, t) = \frac{(1+t)^\mu - 1}{\mu}$$

Logística Exponencial (ELOG). Haciendo $k = 0$

$$f(\mu, 0, t) = \frac{e^{\mu t} - 1}{\mu}$$

Transformación de Potencia Inversa (IPT). Haciendo $\mu = 1$

$$f(1, k, t) = (1 + k \cdot t)^{1/k} - 1$$

Transformación de Potencia Logística Inversa (LIPT). Haciendo $\mu = 0$

$$f(0, k, t) = \frac{1}{k} \cdot \text{Ln}(1 + k \cdot t)$$

El modelo FLOG ha sido aplicado, por ejemplo, para estudiar la penetración de los CDs en la industria discográfica (BEWLEY y GRIFITHS, 2003).

U) Modelo NUI

El modelo de Influencia No Uniforme fue propuesto por EASINGWOOD *et al.*, (1983). Se trata de un modelo flexible cuyo punto de inflexión puede tomar todos los valores entre el 0 y el 1.

$$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)^\delta) \cdot (1 - x(t))$$

$$p, q > 0$$

SHARMA y BHARGAVA (1994) propusieron una mejora a este modelo, de modo que la expresión final, conocida como modelo NHNV, viene dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(p + q \cdot (n(t) + h \cdot n(t-1) + h^2 n(t-2) + \dots)^\delta \right) \cdot (1 - x(t))$$

donde $x(t) = n(t) + n(t-1) + \dots + n(2) + n(1)$

$$p, q > 0$$

$$h \in (0, 1)$$

V) Modelo NSRL

Modelo flexible propuesto por EASINGWOOD *et al.*, (1981) para cuantificar el cambio en la propensión a la imitación. Al igual que los modelos FLOG y NUI su punto de inflexión puede tomar todos los valores entre el 0 y el 1. Realmente es un caso particular del modelo NUI haciendo $p = 0$. Su formulación es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = q \cdot x(t)^\delta \cdot (1 - x(t))$$

La versión Autorregresiva del modelo suele expresarse del siguiente modo:

$$x(t) - x(t-1) = b \cdot x(t-1)^\delta \cdot (1 - x(t-1))$$

$$b, \delta > 0$$

W) Modelo de Bertalanffy

Modelo flexible propuesto por BERTALANFFY (1957) como una generalización de la logística básica. Su punto de inflexión puede encontrarse en todo el intervalo (0,1) dependiendo del valor de los parámetros.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b}{\alpha} \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)^\alpha)$$

$$\alpha \geq -1$$

$$x(t) = \frac{1}{\left[1 + c \cdot \exp(-b \cdot t)\right]^{1/\alpha}}$$

$$\alpha \cdot c > 0$$

Haciendo $\alpha = 1$ se obtiene el modelo logístico básico, mientras que si $\alpha \rightarrow 0$ se obtiene el Gompertz (MEADE e ISLAM, 1998). El modelo de Nelder (ver NELDER 1961 y 1962) es una reparametrización de este modelo, por lo que no puede ser considerado como un modelo independiente.

X) Modelo de Birch

Este modelo flexible propuesto por BIRCH (1999) parte del logístico básico para incorporar una serie de modificaciones que pretenden dotarlo de una mayor flexibilidad. Aunque fue planteada como una curva de crecimiento de especies botánicas y es prácticamente desconocido en la literatura sobre difusión de innovaciones, es sin duda aplicable a estos procesos por las propiedades matemáticas que presenta.

En la ecuación logística, si se calcula el valor de $t - t_0$, siendo t_0 el punto donde se alcanza la mitad del crecimiento, se obtiene la siguiente expresión:

$$x(t) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta \cdot (t - t_0))} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \frac{\text{Ln}(x(t))}{\beta} - \frac{\text{Ln}(1 - x(t))}{\beta}$$

La propuesta de BIRCH consiste en incorporar un parámetro adicional que permite ajustar de forma más flexible la aceleración y deceleración del proceso de crecimiento de la curva, haciendo

$$t - t_0 = \frac{\text{Ln}(x(t))}{\beta} - \frac{c \cdot \text{Ln}(1 - x(t))}{\beta} + \frac{(c - 1) \cdot \text{Ln}(1/2)}{\beta}$$

La ecuación que define este tipo de crecimiento viene dada por la siguiente ecuación, que no puede resolverse por métodos analíticos, siendo necesario recurrir a técnicas de integración numérica:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))}{1 - x(t) + c \cdot x(t)}$$

Obviamente para $c = 1$ se obtiene la logística básica. Por otra parte, la velocidad de crecimiento máxima se alcanza en el punto $x(t) = 1/(\sqrt{c} + 1)$, de modo que para valores de c mayores que 1 la velocidad máxima se alcanza en un punto menor que 1/2 y para c menor que 1 ocurre lo

contrario. Por tanto se trata de un modelo flexible en el que el punto de inflexión puede localizarse en todo el rango de valores entre 0 y 1.

Y) Modelo de Michaelis-Mentel Generalizado

Se trata de un modelo propuesto por LÓPEZ *et al.*, (2000) para representar el aumento de peso de especies animales, y aunque no se tiene constancia de su aplicación como modelo de difusión de tecnologías, la sencillez en su formulación y la flexibilidad que permite lo convierte en un candidato interesante para la modelización de este tipo de fenómenos. La formulación del modelo es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{c \cdot t^{c-1}}{k^c + t^c} \cdot (1 - x(t))$$

$$c, k > 0$$

$$x(t) = \frac{x_0 \cdot k^c + t^c}{k^c + t^c}$$

k es en este caso el tiempo en el que se alcanza la mitad del crecimiento máximo, y x_0 el valor de la cuota de mercado en el instante inicial $t = 0$. Considerando $x_0 = 0$ se obtiene la ecuación original de Michaelis-Mentel.

Sólo para valores de c mayores que 1 la curva presenta una evolución de tipo sigmoideal, con lo que ésta es en la práctica una restricción adicional que debe imponerse al modelo, alcanzándose entonces el punto de inflexión en el punto

$$x(t^*) = \frac{(1+1/c) \cdot x_0 + (1-1/c)}{2}$$

Se trata por tanto de un modelo flexible cuyo punto de inflexión depende tanto del valor del parámetro c como de las condiciones iniciales x_0 .

Z) Otros modelos

a) Modelo KKKI

Propuesto por KUMAR y KUMAR (1992a) como un modelo flexible de sustitución tecnológica².

² Aunque el modelo fue propuesto en primera instancia en KUMAR y KUMAR (1992a), cronológicamente la primera publicación en la que fue mencionado es en KUMAR y KUMAR (1992b), debido al desfase en la publicación del primer trabajo.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{(p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))}{1 - b \cdot x(t)}$$

La versión Autorregresiva del modelo fue propuesta por KUMAR y KUMAR (1992a) en el mismo trabajo en el que plantearon el modelo original.

$$x(t) - x(t-1) = \frac{(p + q \cdot x(t-1)) \cdot (1 - x(t-1))}{1 - b \cdot x(t-1)}$$

$$p, q > 0$$

$$-1 \leq b \leq \frac{q}{p} - 1$$

Merece la pena mencionar que el modelo flexible de Skiadas (SKIADAS, 1986), es relativamente similar, aunque incorpora un parámetro adicional:

$$\frac{dx(t)}{dt} = b \cdot \frac{(g + x(t)) \cdot (1 - x(t))}{1 - x(t) + \sigma \cdot (g + x(t))}$$

b) *Modelo de Harvey*

El modelo fue propuesto por HARVEY (1984) y parte de la logística modificada, siendo al igual que ella, un modelo flexible³.

$$\text{Ln}(x(t)) - \text{Ln}(x(t-1)) = \text{Ln}\left(\frac{b \cdot c}{\alpha}\right) - b \cdot t + \text{Ln}(1 + \alpha) \cdot \text{Ln}(x(t-1))$$

$$b > 0$$

$$\alpha \geq -1$$

$$\alpha \cdot c \geq 0$$

c) *Modelo de Nicholson*

Realmente se trata de un modelo surgido en el ámbito de la biología teórica para explicar la evolución de poblaciones de la *Lucila Cuprina*, un tipo de moscardo (ver por ejemplo RUAN, 2004; BRAUER y CASTILLO-

³ El modelo original propuesto por HARVEY es en realidad el que viene dado por la ecuación $\text{Ln}(x(t)) = \rho \cdot \text{Ln}(x(t-1)) + \delta + \gamma \cdot t$, donde $\rho = (k-1)/k$ y $\gamma = \text{Ln}(k\beta\gamma\alpha^{1/k})$. Como puede comprobarse ambos modelos son equivalentes mediante una reparametrización.

CHÁVEZ, 2001: 119). Su interés radica en el hecho de que tiene una interpretación bastante natural en términos de difusión tecnológica y que además presenta un comportamiento caótico para ciertos valores de sus parámetros. Esto se debe a que, tal y como se comentó en el capítulo IV, al incorporar retardos la ecuación de difusión puede presentar este tipo de comportamiento. La formulación del modelo es la siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} = P \cdot x(t - \tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t - \tau)}{x_0}\right] - \delta \cdot x(t)$$

No se entrará a describir la interpretación de este modelo en términos biológicos, pero se indicará a continuación cuál podría ser su interpretación en términos de difusión tecnológica. Para ello se distinguirá entre los dos componentes de la ecuación.

La primera parte $P \cdot x(t - \tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t - \tau)}{x_0}\right]$ resulta la más compleja de interpretar:

- En primer lugar aparecen retardos. Esto implica que desde que un usuario potencial toma conocimiento de la tecnología y decide adquirirla, transcurre un cierto tiempo antes de que efectivamente la compre.

- Por otra parte este elemento de la ecuación puede interpretarse en términos de comunicación boca-a-oído: cada usuario actual «convence» a otros potenciales consumidores de que adquieran la tecnología. Este modelo en cuestión asume que el número promedio de individuos a los que un usuario convence decae exponencialmente con el número de usuarios. Es decir, cuando hay pocos usuarios cada uno de ellos convence a un gran número de individuos, pero cuando hay un gran número de usuarios cada uno convence a un número mucho menor. Multiplicando el número de usuarios en el instante $t - \tau$ por el número de individuos a los que convence en promedio cada uno de ellos se obtiene el incremento en el número de usuarios.

- Respecto a las dos constantes su interpretación sería la siguiente: x_0 representa el número de usuarios para el que la tasa de crecimiento es máxima y P una constante que permite ajustar la exponencial (la eficacia del proceso de comunicación boca-a-oído).

La segunda parte de la ecuación, $\delta \cdot x(t)$, puede interpretarse como la tasa de clientes que abandonan la tecnología, exactamente igual que se hacía en el modelo de Bass con deserciones.

Este modelo, que ha sido estudiado en gran detalle por parte de los biólogos teóricos, puede representar un proceso de difusión tecnológica

de tipo sigmoidal para ciertos valores de sus parámetros, mientras que para otros su comportamiento es caótico, tal y como se muestra en la figura 5.6.

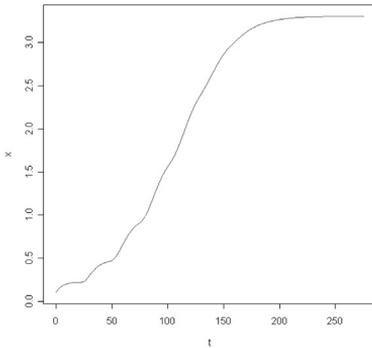
FIGURA 5.6

DISTINTOS COMPORTAMIENTOS DE LA ECUACIÓN DE NICHOLSON

$$\frac{dx(t)}{dt} = P \cdot x(t - \tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t - \tau)}{x_0}\right] - \delta \cdot x(t)$$

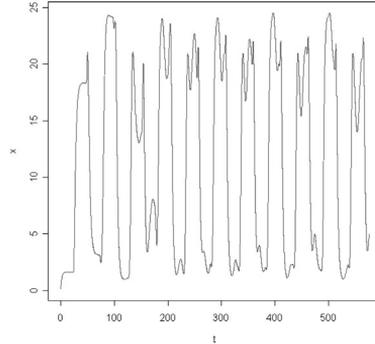
Difusión sigmoidal

$P = 0.4$; $x_0 = 4$; $\tau = 24$; $\delta = 0.175$



Comportamiento caótico

$P = 8$; $x_0 = 4$; $\tau = 24$; $\delta = 0.475$



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

d) Modelo de De Cesare y Di Liddo

Este último modelo se ha incluido a fin de poner de manifiesto las características que presentan los modelos que incluyen dimensiones espaciales. Su formulación es la siguiente (DE CESARE y DI LIDDO, 2000):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} &= q(p(t)) \cdot (I(z,t) + \gamma(t)) \cdot (1 - u(z,t)) \\ z &\in \Omega \\ t &\in [0, T] \end{aligned}$$

En este caso el número de adoptantes viene representado por $u(z,t)$ y z representa un punto del espacio, que toma valores en una región geográfica $\Omega \in R^2$. $p(t)$ es el precio de venta (que puede variar a lo largo del tiempo) y $q(p(t))$ es una función de respuesta al precio por parte de los consumidores, que típicamente será decreciente. $\gamma(t)$ representa el

efecto publicitario y $I(z, t)$ el efecto de la comunicación boca-a-oido (de hecho es un término que en un modelo sobre externalidades podría representar el efecto geográfico de las Externalidades de Red de aprendizaje). Este efecto de la comunicación boca-a-oido depende de una función $K(z, s)$ que representa el modo en que los adoptantes ejercen influencia en una zona a su alrededor.

$$I(z, t) = \int_{\Omega} K(z, s) \cdot u(s, t) \cdot ds$$

Es preciso destacar varios aspectos de este modelo:

- El modelo sugiere una expansión de la innovación en una determinada región geográfica (modelo de difusión espacio-temporal), que podría ser por ejemplo una ciudad o un país. Por este motivo el número de adoptantes depende tanto del tiempo t como del espacio z .

- Dado el coste unitario de la publicidad (c_a), el coste unitario de producción (c_p) y el factor de descuento (r) para actualizar los flujos financieros, se obtiene de forma inmediata una expresión para los beneficios actualizados de la empresa:

$$B = \int_0^T e^{-rt} \cdot \left((p(t) - c_p) \cdot \int_{\Omega} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \cdot dz - c_a \cdot \gamma(t) \right) \cdot dt$$

- La ecuación de difusión planteada es una ecuación integrodiferencial de las que se mencionaron en el capítulo IV al estudiar la Teoría de Sistemas Dinámicos.

- Se trata de un modelo de difusión de innovaciones que, como los propios autores comentan, está inspirado en gran medida en el campo de la biología teórica.

Realmente es posible encontrar infinidad de modelos con una evolución sigmoïdal, tanto en el ámbito de la Economía como de otras disciplinas (p.e. la Biología), y aunque se ha pretendido desarrollar una revisión exhaustiva, no es posible recoger todos los modelos existentes y cada una de sus variantes.

La revisión bibliográfica realizada garantiza que los más relevantes han sido incluidos, pero siempre existe la posibilidad de omitir modelos concretos empleados en algún trabajo puntual. De hecho se han identificado algunos modelos que finalmente no han sido incluidos por considerar que no aportaban demasiado al presente estudio, como el modelo extendido de Riccati (LEVENBACH y REUTER, 1976), la variante II del modelo de Kumar y Kumar (1992a), el modelo de Karshenas y Stoneman (1992), la variante del NUI propuesta por Molyneux y Shamroukh

(1996), los modelos de Chu (2000), surgidos en el ámbito de la Ingeniería Química, el modelo de crecimiento poblacional de Puu (2003: 204-209) o el modelo de Goudriaan y sus variantes (YIN *et al.*, 2003).

4. CLASIFICACIÓN Y SÍNTESIS DE MODELOS DE DIFUSIÓN

A modo de síntesis la tabla 5.1 recoge los 37 principales modelos analizados.

TABLA 5.1
SÍNTESIS DE MODELOS DE DIFUSIÓN ESTUDIADOS

Modelo	Ecuación	Referencias
Gompertz	$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot \text{Ln} \frac{1}{x(t)}$ $x(t) = \exp[-\exp(-\beta \cdot t + k)]$	FRANSES (1994), MORRISON (1996)
Gompertz. Variante de Chow	$\frac{dx(t)}{dt} = \beta(t) \cdot x(t) \cdot \text{Ln} \frac{1}{x(t)}$ $x(t) = \exp[-\exp(-\int \beta(z) \cdot dz)]$	CHOW (1967)
Gompertz. Variante de tres parámetros	$x(t) = a \cdot b^{-t^c}$	WEISSTEIN (1999; 748)
Gompertz. Variante de Lee <i>et al.</i>	$x(t) = \exp\left[-\exp\left[-\left((\alpha + \beta \cdot t)^{\nu\lambda} + \gamma\right)\right]\right]$	LEE <i>et al.</i> (1982)
Gaussiano	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	ROGERS (1962)
Log-Normal	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{t \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(\text{Ln}(t) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	BAIN (1963)
Weibull	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right]$ $x(t) = 1 - \exp\left[-\left(t/\alpha\right)^\beta\right]$	SHARIF e ISLAM (1980)
Weibull con tres parámetros	$x(t) = 1 - \exp\left[-\left((t-\tau)/\alpha\right)^\beta\right]$	MURTHY <i>et al.</i> (2004; 9)
Log-Recíproco	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{b \cdot t^2} \exp\left[-\frac{1}{b \cdot t}\right]$ $x(t) = \exp\left[-1/b(b \cdot t)\right]$	MCCARTHY y RYAN (1976)
Gamma	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x(t)^{p-1} \cdot e^{-a \cdot x(t)}$	FERNÁNDEZ- ABASCAL <i>et al.</i> (1994; 448-452)
Beta	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} \cdot x(t)^{p-1} \cdot (1-x(t))^{q-1}$	FERNÁNDEZ- ABASCAL <i>et al.</i> (1994; 455-458)
Singh y Maddala	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot t^{a_2-1}}{(1+a_1 \cdot t^{a_2})^{a_3+1}}$ $x(t) = 1 - 1/(1+a_1 \cdot t^{a_2})^{a_3}$	SINGH y MADDALA (1976)

(Continúa)

TABLA 5.1 (Continuación)

Modelo	Ecuación	Referencias
Adaptativo Polinómico	$\frac{dx(t)}{dt} = P_0 + 2 \cdot a_2 \cdot t + 3 \cdot a_3 \cdot t^2 + 4 \cdot a_4 \cdot t^3$	MARTÍN-CARRILLO (2000; 170-189)
Logístico	$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$ $x(t) = 1 / [1 + \exp(-\beta \cdot (t - t_0))]$	GRILICHES (1957 y 1960), MANSFIELD (1961)
Logístico. Variante de Chow	$\frac{dx(t)}{dt} = \beta(t) \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$ $x(t) = 1 / [1 + \exp(-\int \beta(z) \cdot dz)]$	HEMES (1976)
Paloheimo y Dickie	$\frac{dx(t)}{dt} = H \cdot x(t)^d - k \cdot x(t)^n$	PALOHEIMO y DICKEI (1965)
Bass	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))$ $x(t) = \frac{1 - \exp(-(p + q) \cdot t)}{1 + (q/p) \cdot \exp(-(p + q) \cdot t)}$	BASS (1969)
Bass. Variante para $x(0) \neq 0$	$x(t) = [1 - c \cdot (p/q) \cdot \exp(-(p + q) \cdot t)] / [1 + c \cdot \exp(-(p + q) \cdot t)]$	MEADE e ISLAM (1998)
Bass. Variante con efecto aprendizaje	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + c \cdot k \cdot y(t)) \cdot (1 - x(t))$	GANESH <i>et al.</i> (1997)
Bass con deserciones	$\frac{dx(t)}{dt} = (\lambda_e + \lambda_i \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t)) - \mu \cdot x(t)$	BIDGES <i>et al.</i> (1993)
Bass en tres etapas	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q_1 \cdot A(t) + q_2 \cdot x(t)) \cdot (1 - A(t) - x(t))$	JAIN <i>et al.</i> (1991)
Bass con efectos publicitarios (innovación e imitación)	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + \alpha \cdot f(A) \cdot (1 - x(t)))$ $\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t) + \beta \cdot f(A) \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))$	SIMON y SABASTIAN (1987)
Floyd	$\frac{dx(t)}{dt} = b \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))^2$	FLOYD (1968)
Sharif y Kabir	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))^2}{1 - x(t) \cdot (1 - \sigma)}$	SHARIF y KABIR (1976)
Stanford	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{q}{t} \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$	TEOTIA y RAJU (1986)
Jeuland	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))^{1+\gamma}$	JEULAND (1981)
FLOG	$\frac{dx(t)}{dt} = \phi \cdot f'(\mu, k, t) \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))$	BEWLEY y FIEBIG (1988)
NUI	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot x(t)^\delta) \cdot (1 - x(t))$	EASINWOOD <i>et al.</i> (1983)
NHNV	$\frac{dx(t)}{dt} = (p + q \cdot (n(t) + h \cdot n(t-1) + h^2 n(t-2) + \dots)^\delta) \cdot (1 - x(t))$	SHARMA y BHARGAVA (1994)
NSRL	$\frac{dx(t)}{dt} = q \cdot x(t)^\delta \cdot (1 - x(t))$	EASINWOOD <i>et al.</i> (1981)

(Continúa)

TABLA 5.1 (Continuación)

Modelo	Ecuación	Referencias
Bertalanffy	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{b}{\alpha} \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)^\alpha)$	BERTALANFFY (1957)
Birch	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t))}{1 - x(t) + c \cdot x(t)}$	BIRCH (1999)
Michaelis-Mentel Generalizado	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{c \cdot t^{c-1}}{k^c + t^c} \cdot (1 - x(t))$	LÓPEZ <i>et al.</i> (2000)
KKKI	$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{(p + q \cdot x(t)) \cdot (1 - x(t))}{1 - b \cdot x(t)}$	KUMAR y KUMAR (1992a y 1992b)
Harvey	$Ln(x(t) - x(t-1)) = Ln\left(\frac{b \cdot c}{\alpha}\right) - b \cdot t + Ln(1 + \alpha) \cdot Ln(x(t-1))$	HARVEY (1984)
Nicholson	$\frac{dx(t)}{dt} = P \cdot x(t - \tau) \cdot \exp\left[-\frac{x(t - \tau)}{x_0}\right] - \delta \cdot x(t)$	RUAN (2004)
De Cesare y Di Liddo	$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = q(p(t)) \cdot \left(\int_{\Omega} K(z,s) \cdot u(s,t) \cdot ds + \gamma(t)\right) \cdot (1 - u(z,t))$ $I(z,t) = \int_{\Omega} K(z,s) \cdot u(s,t) \cdot ds$	De CESARE y Di LIDDO (2000)

Fuente: Elaboración propia

Como se mencionaba al principio del capítulo, resulta complicado establecer un criterio de clasificación, de modo que en este libro se ha optado por un criterio basado en el número de parámetros del modelo. Este criterio presenta dos ventajas fundamentales:

- Permite establecer una jerarquía en cuanto a la dificultad de ajuste con datos reales: lógicamente a mayor número de parámetros, mayor dificultad de ajuste y mayor necesidad de datos para que la estimación tenga validez estadística.

- Permite recoger de una forma sencilla las relaciones existentes entre los distintos modelos. Dichas relaciones se han ido mencionando a lo largo del capítulo, pero es relativamente sencillo esquematizarlas en una serie de tablas en las que la visualización sea más fácil.

Para establecer esta clasificación se ha seguido un proceso de dos etapas:

1. En primer lugar se han estructurado en dos tablas los modelos más relevantes (figuras 5.7 y 5.8). No se han incluido aquellos que tienen más de una variable, y tampoco los de tipo estadístico, debido a que como se ha comentado, estos últimos tienen una aplicación limitada al fenómeno de las Externalidades de Red por su difícil interpre-

tación. En estas tablas se ha establecido una jerarquía en función del número de parámetros que aparecen en la ecuación diferencial (que siempre será uno menos de los que finalmente deban calcularse, debido a la constante de integración), y se han indicado las relaciones que existen entre ellos.

2. En las figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se proponen una serie de modelos propios (en orden creciente de complejidad) que unifican a los anteriores, y que se han dibujado en un color diferente a fin de distinguirlos de los modelos originales. Respecto a estas tres últimas tablas es preciso mencionar lo siguiente:

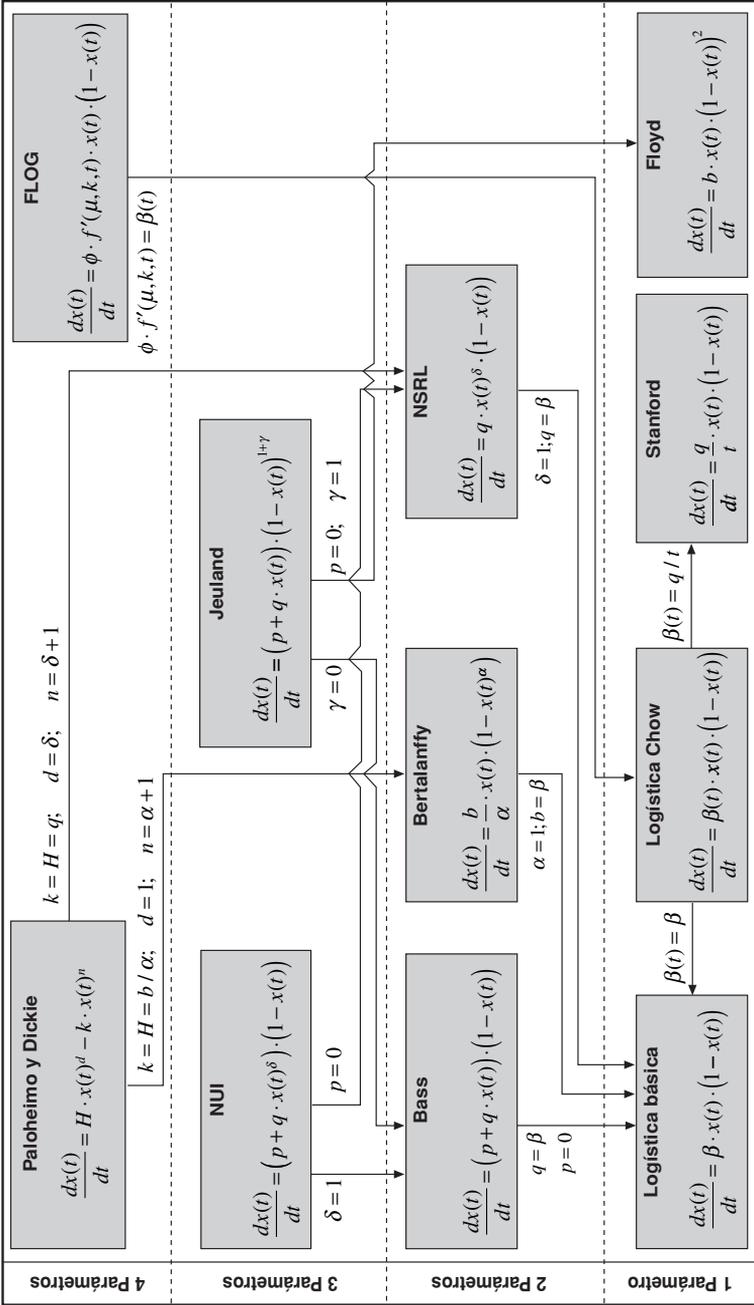
- En la práctica sería posible la unificación completa de todos los modelos mediante una ecuación con el suficiente número de parámetros, ya que bastaría con ir añadiendo factores multiplicativos elevados a un exponente hasta recoger todas las posibles variantes. Esto es lo que se hace, a modo de ejemplo, en el caso de la unificación de los modelos 6 y 4 en el modelo 7 (figura 5.11). Sin embargo esto carece de sentido puesto que la ecuación final sería muy difícil de calibrar con datos reales debido a su gran número de parámetros.

- Sin recurrir a este extremo es posible lograr una unificación de muchos de los modelos, de modo que con un número suficientemente pequeño de parámetros es posible formular una ecuación que recoja como casos particulares un gran número de ellos. Por ejemplo, el modelo 1 (figura 5.9) con tan sólo 4 parámetros (más la constante de integración) es capaz de unificar 6 ecuaciones: NUI, Jeuland, Bass, Floyd, NSRL y logística. Añadiendo más parámetros es posible lograr unificar un mayor número de modelos, aunque el «rendimiento» (ratio ecuaciones entre parámetros) es cada vez menor. De este modo el modelo 6 (figura 5.11) con 7 parámetros recoge como casos particulares todos los anteriores más el de Ploheimo y Dickie y el de Bass con deserciones (para incorporar 2 nuevas ecuaciones ha sido preciso introducir 3 nuevos parámetros).

- Debido a este problema, la unificación de ecuaciones se ha detenido en el modelo 7, que cuenta con 9 parámetros. Lógicamente una ecuación de este tipo carece ya de sentido desde el punto de vista práctico.

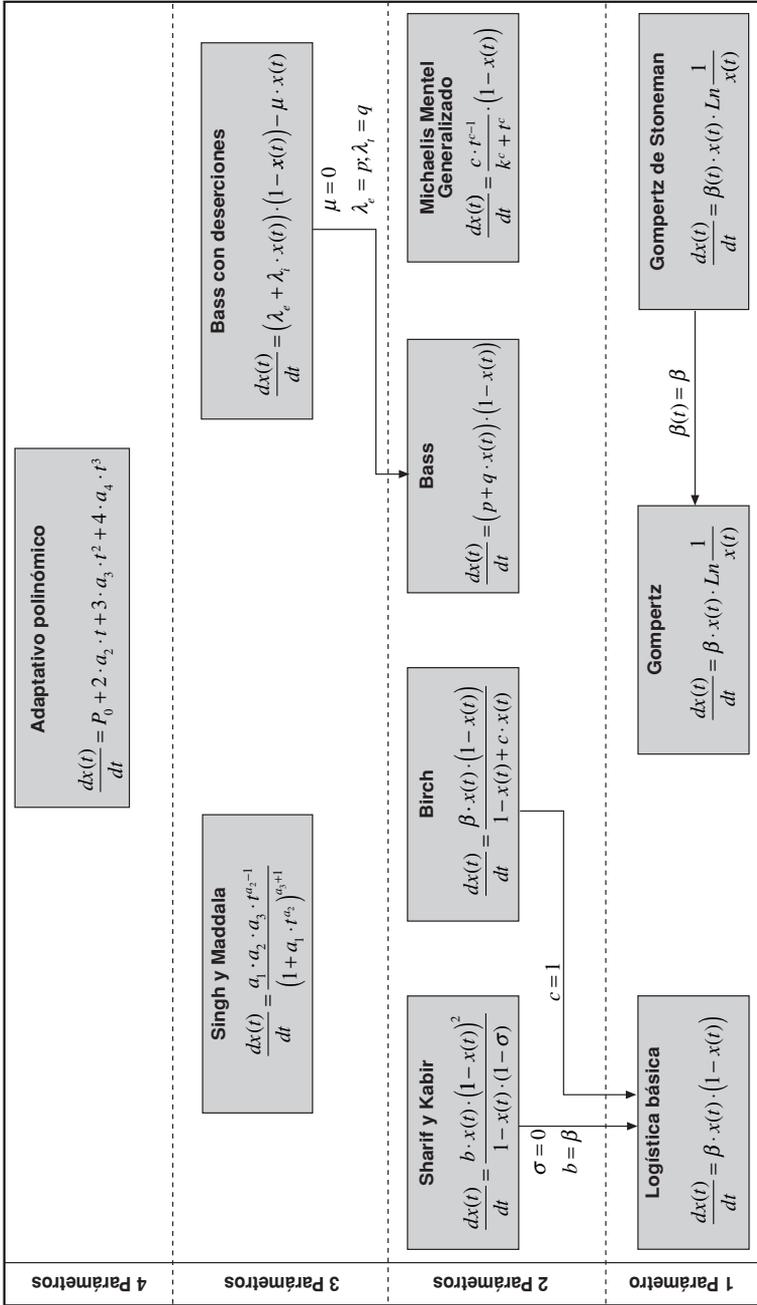
En resumen, las similitudes que existen entre algunos de los modelos estudiados permite formular una serie de modelos generales que sintetizan varios de ellos, aunque no es posible lograr una unificación completa sin recurrir a una ecuación con elevado número de parámetros que, por tanto, no tiene ningún interés desde el punto de vista práctico.

FIGURA 5.7
RELACIONES ENTRE LOS MODELOS ESTUDIADOS (I)



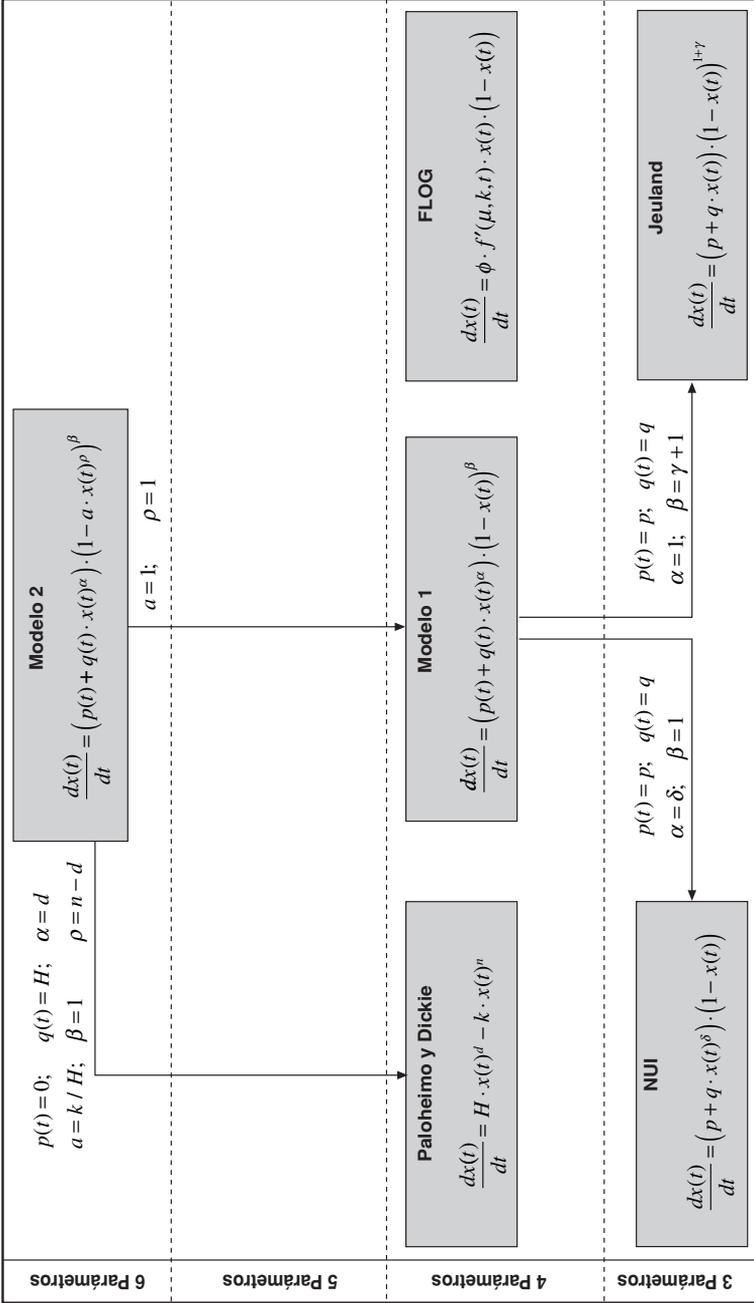
Fuente: Elaboración propia

FIGURA 5.8
RELACIONES ENTRE LOS MODELOS ESTUDIADOS (II)



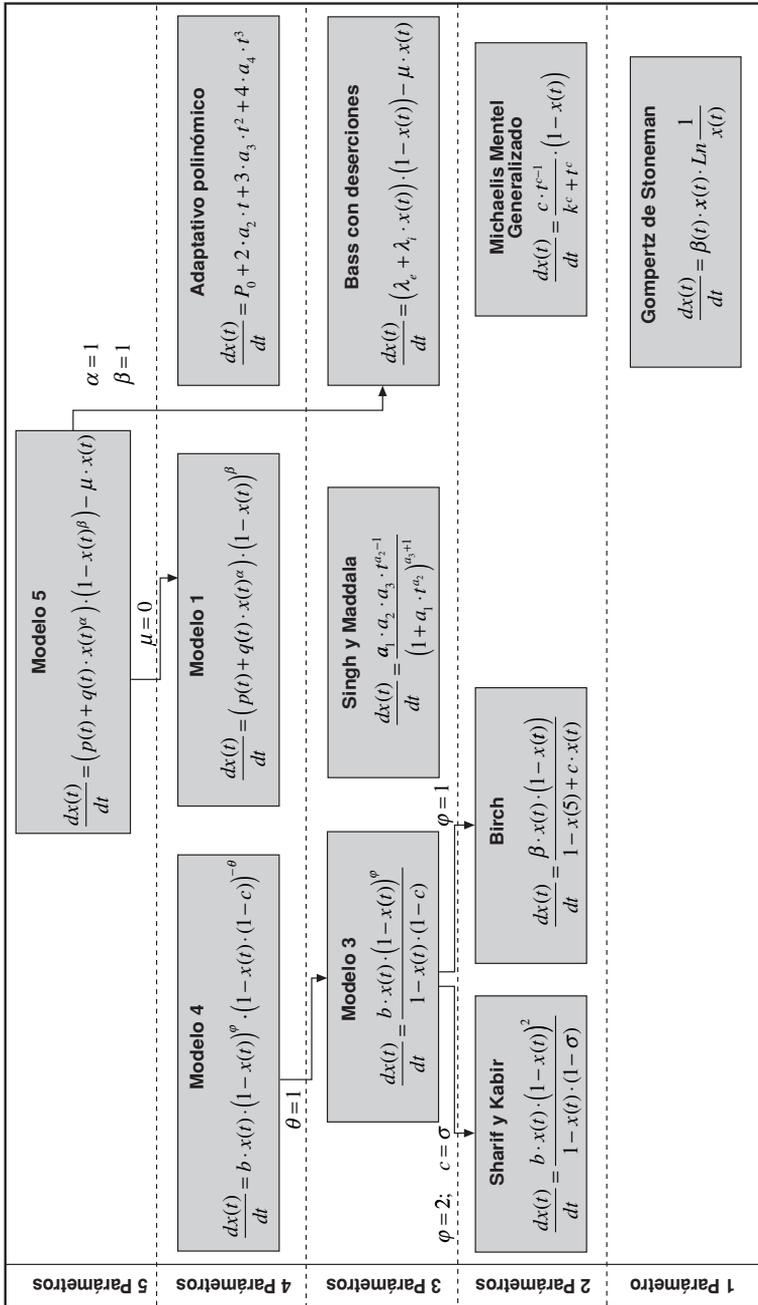
Fuente: Elaboración propia

FIGURA 5.9
UNIFICACIÓN DE LOS MODELOS ESTUDIADOS (I)



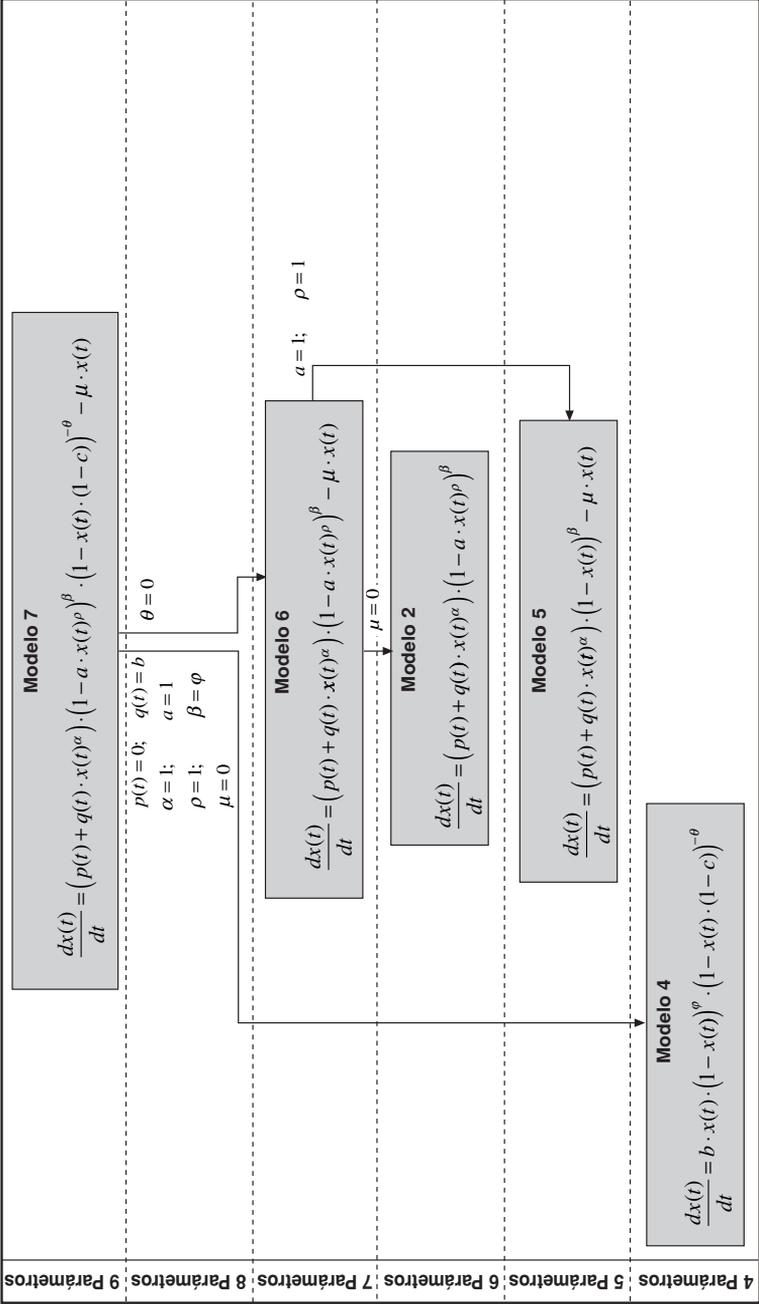
Fuente: Elaboración propia

FIGURA 5.10
UNIFICACIÓN DE LOS MODELOS ESTUDIADOS (II)



Fuente: Elaboración propia

FIGURA 5.11
UNIFICACIÓN DE LOS MODELOS ESTUDIADOS (III)



Fuente: Elaboración propia

5. EXTENSIONES DE LOS MODELOS DE DIFUSIÓN

Como ya se ha mencionado, resulta relativamente sencillo extender algunos de los modelos de difusión estudiados a esquemas de competencia. El modelo logístico, por ejemplo, puede ser generalizado a dos dimensiones a fin de contemplar los efectos de competencia entre distintos estándares tecnológicos, denominándose en este caso modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra.

ECUACIÓN LOGÍSTICA C. INTERESPECÍFICA LOTKA-VOLTERRA

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = \beta_{11} \cdot x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - \beta_{12} \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \beta_{22} \cdot x_2(t) \cdot (1 - x_2(t)) - \beta_{21} \cdot x_2(t) \cdot x_1(t) \end{cases}$$

De hecho la generalización a n dimensiones es trivial en este caso, tal y como se indica en el siguiente sistema de ecuaciones (modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra n -dimensional):

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \beta_{ii} \cdot x_i(t) \cdot (1 - x_i(t)) - \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \cdot x_i(t) \cdot x_j(t)$$

$\forall \quad i = 1, 2, \dots, n$

En el siguiente capítulo se estudiarán en detalle las características de este y otros modelos, siendo en muchos casos generalizaciones de los modelos de difusión que ya han sido analizados.

6. CONCLUSIONES

Nuevamente hay tres ideas que merecen ser destacadas de este capítulo:

- La difusión de innovaciones puede definirse como la diseminación de una nueva idea desde su fuente de creación hasta los usuarios finales.
- Es frecuente asumir que la distribución no acumulada de frecuencias correspondiente a un proceso de difusión que siga una evolución temporal de tipo sigmoideal es aproximadamente normal, siendo posible distinguir entre cinco grupos de usuarios en función de su propensión a adquirir el producto: innovadores, primeros adoptantes, mayoría precoz, mayoría tardía y rezagados. No obstante también se han desarrollado otras distribuciones para la clasificación de adoptantes.
- Existe una cantidad ingente de modelos de difusión compatibles con la evolución de un producto de red, aunque muchos de ellos están relacionados (o en terminos técnicos, se trata de *nested models*).

CAPÍTULO VI

MODELOS MULTIDIMENSIONALES (COMPETENCIA)

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo de este capítulo es revisar aquellos modelos de dimensión mayor que uno y basados en la Teoría de Sistemas Dinámicos que incorporen algún elemento relevante para el estudio de los mercados de redes. Si en el capítulo anterior se han estudiado distintos modelos de difusión tecnológica (unidimensionales), en éste se pretende introducir modelos más complejos que consideran efectos interactivos de distinto tipo (multidimensionales), y que en muchos casos pueden verse como generalizaciones de los distintos modelos de difusión estudiados en el capítulo anterior. La mayoría de los sistemas que se estudian, pese a haber sido empleados también en la literatura económica, surgen en el contexto de la biología teórica, aunque su interpretación se hará en términos de Externalidades de Red.

1. INTRODUCCIÓN

Casi todos los elementos requeridos para la elaboración de un modelo de competencia entre estándares tecnológicos sujetos a Efectos de Red ya han sido expuestos. Para completar el análisis sólo es preciso estudiar las características propias de sistemas multidimensionales, en los que se consideren de forma simultánea dos o más variables y las interacciones entre ellas.

Como se estudió en el capítulo III, uno de los factores clave para el éxito de una tecnología en presencia de Efectos de Red es el mercado

de complementarios. Matemáticamente esta relación entre, por ejemplo, un proveedor de hardware y uno de software complementario puede representarse (al menos en una primera aproximación) mediante un sistema dinámico de 2 ecuaciones. Se estaría hablando en este caso de modelos de **simbiosis** o **mutualismo**. Si se considera la competencia entre dos tecnologías rivales como el sistema operativo *Windows* de Microsoft y *Solaris* de Sun, los modelos deberán constar también en este caso de un mínimo de dos ecuaciones diferenciales, y se hablaría de modelos de competencia, o como lo denominan los biólogos, **competencia interespecífica**. En cualquiera de los casos anteriores, puesto que el número de usuarios de una determinada tecnología es necesariamente finito, las ecuaciones deben incluir ciertos términos que limiten el número máximo de adoptantes, términos que la literatura sobre biología teórica suele identificar con procesos de **competencia intraespecífica**. También se comentó en el capítulo II la importancia de la generación de expectativas de éxito en el proceso de adopción tecnológica, y en determinados casos la comunicación boca-a-oido puede ser un mecanismo sumamente efectivo: Google apenas invirtió en publicidad y sin embargo logró hacerse con el dominio del mercado de buscadores de Internet a través de este sistema. Por tanto puede ser interesante incorporar al modelo de competencia tecnológica ciertas características de los modelos de **infección parasitaria**, que como se verá pueden emplearse para expresar en términos matemáticos este tipo de fenómenos.

En resumen, las distintas interacciones entre estándares tecnológicos pueden vincularse a modelos biológicos como se indica en la figura 6.1.

FIGURA 6.1
DIFERENTES TIPOS DE RELACIÓN
ENTRE ESTÁNDARES TECNOLÓGICOS

		Efecto de la Tecnología 1 en la Tecnología 2	
		POSITIVA	NEGATIVA
Efecto de la Tecnología 1 en la Tecnología 2	POSITIVA	Simbiosis	Depredación o Parasitismo
	NEGATIVA	Depredación o Parasitismo	Competencia

Fuente: Adaptado de PRISTORIUS y UTTERBACK (1997).

De hecho, numerosos autores han estudiado la aplicación de este tipo de modelos biológicos a diferentes problemas económicos y organizativos, como por ejemplo CASTIAUX (2004); SPROTT (2004); HIVNER *et al.*, (2003); MORRIS y PRATT (2003); WATANABE *et al.*, (2003); CHEN (2002); ANDERSEN (2002); LÓPEZ y SANJUAN (2001); THOMAS *et al.*, (2001); ZANGWILL y KANTOR (2000); MODIS (1997); PRISTORIUS y UTTERBACK (1997); BAUM y KORN (1996), REGGIANI y NIJKAMP (1994: 94-108) y muchos otros que se irán mencionando a lo largo del presente capítulo. Y es que, como señalan distintos investigadores (por ejemplo THOMAS *et al.*, 2001; BHARGAVA y MUKHERJEE, 1994: 54; Marcheti, 1983), este tipo de modelos presenta un enorme potencial para representar determinados fenómenos económicos y sociales.

Realmente muchos de los conceptos que se han estudiado hasta el momento pueden ser modelizados de forma relativamente sencilla mediante la Teoría de Sistemas Dinámicos, debido a que los mecanismos subyacentes son idénticos a los que se encuentran en muchos otros sistemas, como por ejemplo los biológicos o químicos. Por ejemplo las Ecuaciones de Lotka-Volterra de competencia interespecífica expresan únicamente un mecanismo de competencia: desde el punto de vista matemático carece de importancia que se trate de competencia entre especies animales o entre estándares rivales.

Por último indicar que en el ámbito de la biología teórica se han desarrollado una cantidad ingente de modelos relacionados con cada uno de los procesos básicos que pueden tener interés para el estudio de los mercados de redes, de modo que no se pretende en este capítulo realizar una revisión exhaustiva de cada uno de ellos. Simplemente se mostrarán en cada caso los modelos más representativos, a fin de identificar aquellos elementos que caracterizan el proceso. Aunque se analizará también otro tipo de modelos, el estudio se centrará en sistemas de ecuaciones del tipo de Kolmogorov, es decir, aquellos que pueden ser expresados del siguiente modo (BRAUER y CASTILLO-CHÁVEZ, 2001: 271):

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot g(x, y)$$

Comprendiendo la naturaleza de las Externalidades de Red (capítulos II y III) y conociendo las reglas matemáticas que permiten modelizar cada uno de sus elementos (capítulos IV, V y VI), es posible plantear modelos específicos para representar el funcionamiento de los mercados de redes.

2. MODELOS DE PREDADOR-PRESA

Aunque existen diferentes propuestas teóricas, este apartado se centrará en los modelos de tipo Lotka-Volterra, que son los empleados más habitualmente y presentan unas propiedades muy interesantes.

A) Modelo Lotka-Volterra depredador-presa sin competencia intraespecífica

Probablemente el modelo depredador-presa más simple que puede plantearse es el de Lotka-Volterra (sin competencia intraespecífica). Este modelo, propuesto por LOTKA (1925) y VOLTERRA (1931) asume que el número de presas crece sin límite en ausencia de depredadores. De este modo el caso más simple con un único tipo de depredador, $y(t)$, y un único tipo de presa, $x(t)$, queda formulado del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \cdot (a - b \cdot y) \\ \frac{dy}{dt} &= y \cdot (c \cdot x - d) \\ a, b, c, d &> 0\end{aligned}$$

Como señala HUTCHINSON (1978: 221), este sistema posee solución analítica exacta, que queda expresada como:

$$\left[\frac{c \cdot x}{d \cdot \exp(c \cdot x/d)} \right]^d \cdot \left[\frac{b \cdot y}{a \cdot \exp(b \cdot y/a)} \right]^a = K$$

siendo K la constante de integración. Aunque en la figura 6.2 se muestra una solución de tipo ciclo límite, este sistema permite otro tipo de soluciones en función del valor de sus parámetros, como las oscilaciones amortiguadas hasta alcanzar un punto fijo o las oscilaciones explosivas (SWART, 1990).

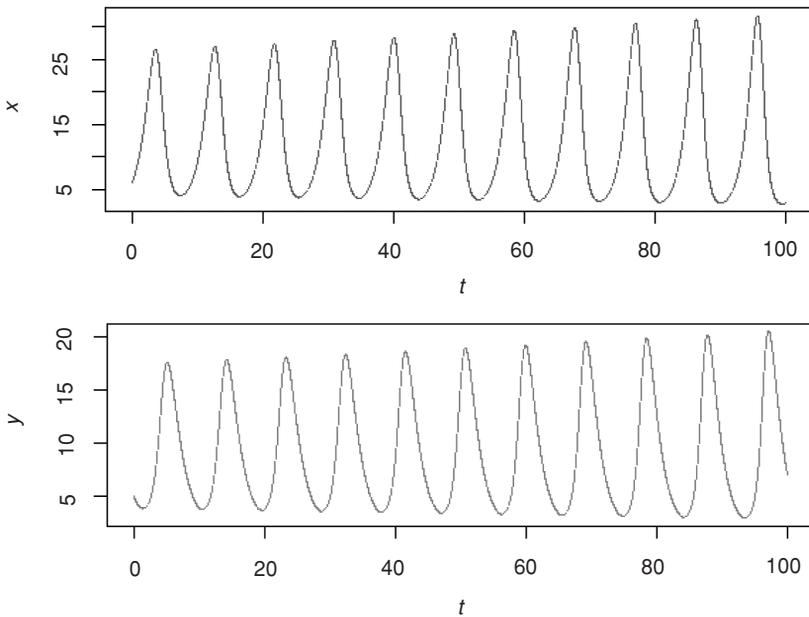
Es necesario indicar que tanto este modelo, como todos los demás de tipo Lotka-Volterra que se estudiarán a continuación (depredador-presa con competencia intraespecífica, competencia interespecífica y simbiosis), son en realidad casos particulares del modelo general de Lotka-Volterra, que puede formularse del siguiente modo (DAVIS, 1962: 109):

$$\frac{dx}{dt} = F + C \cdot x + D \cdot y + G \cdot x^2 + H \cdot x \cdot y + K \cdot y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = E + A \cdot x + B \cdot y + L \cdot x^2 + M \cdot x \cdot y + N \cdot y^2$$

FIGURA 6.2

COMPORTAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE LOTKA-VOLTERRA DEPREDADOR-PRESA SIN COMPETENCIA INTRAESPECÍFICA (a = 0.9, b = 0.1, c = 0.05, d = 0.6)



Fuente: Elaboración Propia (algoritmo programado en «R»).

Volviendo al modelo de Lotka-Volterra depredador-presa sin competencia intraespecífica, es sencillo plantear su generalización a esquemas de dimensión superior, de modo que puede formularse un modelo con k depredadores y l presas, en el que todos los depredadores interactúan con todas las presas aunque con distinto grado de severidad. En este caso el sistema de ecuaciones, de dimensión $k + l$, quedaría expresado del siguiente modo:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \cdot \left(a_i - \sum_{j=1}^k b_{ij} \cdot y_j \right)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^l c_{ij} \cdot x_j - d_i \right)$$

El interés de este modelo está en la forma de introducir el proceso de depredación. Como puede verse, este efecto se introduce en la ecuación de las presas mediante un término que viene dado por: $-x_i \cdot \sum_{j=1}^k b_{ij} \cdot y_j$.

Por tanto, para el caso de competencia tecnológica que estamos estudiando, podemos tomar este tipo de formulación como una primera aproximación a los efectos negativos que provoca en un estándar el crecimiento de la cuota de mercado de otros estándares rivales e incompatibles.

Sin embargo ésta no es la única generalización posible, y por ejemplo en 1998, SAMARDZIJA y GRELLER propusieron un sistema con dos depredadores y una presa ligeramente distinto, y que además presenta un comportamiento caótico bajo condiciones menos estrictas que el modelo original (COSTELLO, 1999).

Como curiosidad merece la pena mencionar que estas ecuaciones, que fueron formuladas originalmente para describir la interacción entre poblaciones de depredadores y presas, aparecen en el ámbito de la química y se emplean para representar determinados procesos autocatalíticos (MURRAY, 2002: 203). Del mismo modo, BRANDER y TAYLOR (1998), desarrollaron un interesante modelo económico relacionado con estas ecuaciones. Y como señalan STAUFFER y SCHULZE (2005) modelos similares se han empleado para estudiar la evolución de los lenguajes. Una vez más queda de manifiesto el carácter general de los sistemas dinámicos.

B) Modelo Lotka-Volterra depredador-presa con competencia intraespecífica

El sistema depredador-presa de Lotka-Volterra con competencia intraespecífica trata de solucionar el problema del crecimiento incontrolado de presas en ausencia de depredadores, de modo que añade un término que limita este crecimiento. Del mismo modo se limita también el crecimiento de depredadores añadiendo a la ecuación correspondiente un factor adicional. La formulación para el caso bidimensional es la siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \cdot (a - \lambda \cdot x - b \cdot y) \\ \frac{dy}{dt} &= y \cdot (-c + d \cdot x - \mu \cdot y)\end{aligned}$$

Puede verse que el mecanismo que limita el crecimiento de presas y depredadores viene dado por los términos $-\lambda \cdot x$ y $-\mu \cdot y$ respectivamente. Estos términos inducen una realimentación negativa que frena el crecimiento a medida que las poblaciones se aproximan a su tamaño máximo.

C) Modelos depredador-presa avanzados

Como ya se ha indicado, en el modelo de Lotka-Volterra clásico los efectos de la depredación se introducen mediante un término lineal. Sin embargo es posible plantear modelos más complejos, y de hecho se han formulado una gran variedad de modelos alternativos. MURRAY (2002: 86-88) identifica distintas posibilidades partiendo del siguiente esquema:

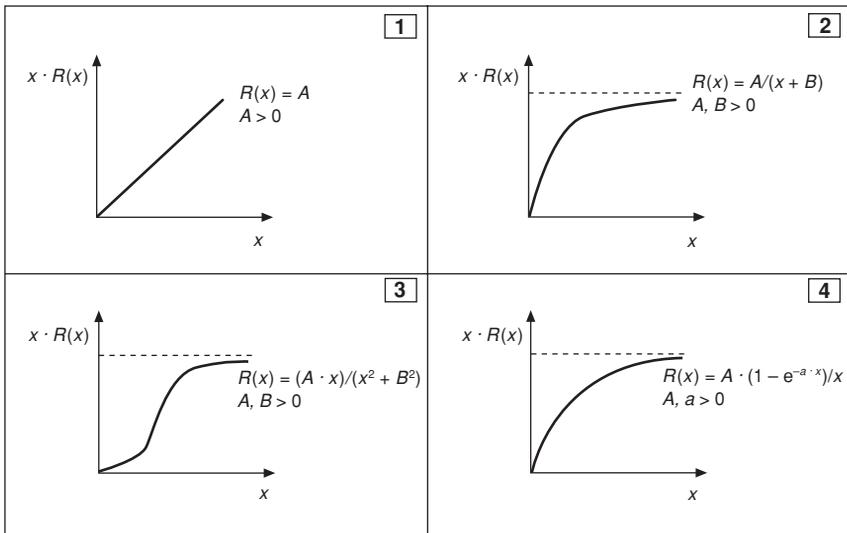
$$\frac{dx}{dt} = x \cdot (a - \lambda \cdot x) - x \cdot y \cdot R(x)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot G(x, y)$$

$R(x)$ es en este caso una función que refleja la respuesta del depredador a cambios en la densidad del número de presas. La figura 6.3 muestra cuatro formulaciones alternativas de $R(x)$, y como puede comprobarse fácilmente, la primera de ellas corresponde precisamente al modelo de Lotka-Volterra con competencia intraespecífica. La función $G(x)$ también tiene distintas formulaciones ¹.

FIGURA 6.3

FORMULACIONES ALTERNATIVAS PARA LA RESPUESTA DE LOS DEPREDADORES A CAMBIOS EN LA DENSIDAD DE PRESAS



Fuente: Adaptado de MURRAY (2002: 87).

¹ Por ejemplo (PIANKA, 1982: 193) propone una función en la que el efecto amortiguador para el depredador incluye la densidad de la presa, de modo que $G(x, y) = \alpha \cdot x - \beta \cdot y/x$.

3. MODELOS DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA

Puesto que se trata de modelos específicamente formulados para representar la interacción competitiva entre distintas especies, es lógico pensar que gran parte de sus elementos resulten de interés para modelizar esquemas de competencia tecnológica, aunque sea preciso realizar ciertas modificaciones a fin de adaptarlos convenientemente.

A) Modelo Lotka-Volterra de competencia interespecífica

El modelo de competencia interespecífica de Lotka-Volterra ha sido profusamente estudiado en el ámbito de la Biología Teórica (ver por ejemplo MURRAY, 2002: 94-99; ALSTAD, 2001: 71-90; CASE, 2000: 319-326; KEDDY, 2001: 336-346). Al margen de sus aplicaciones al campo de la Biología Matemática, los modelos tipo Lotka-Volterra han sido también empleados en el ámbito de la Economía para estudiar temas tan diversos como los mercados financieros (SPROTT, 2004) o la competencia entre portales de Internet (LÓPEZ *et al.*, 2003; LÓPEZ y SANJUAN, 2001). Del mismo modo, en el ámbito de la Dirección de empresas también ha sido utilizado aunque, salvo algunas excepciones (ver por ejemplo ANDERSEN, 2002), con un enfoque distinto al que se busca en este libro, ya que eran aplicadas a poblaciones de empresas, no a empresas individuales (NÚÑEZ NICKEL y MOYANO FUENTES, 2002). Este modelo puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot (1 - x_i) - x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$a_{ij} > 0$$

o análogamente²:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot \left(1 - x_i - \sum_{j \neq i} a'_{ij} \cdot x_j \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

donde r_i es la tasa de crecimiento del estándar i -ésimo y a_{ij} el coeficiente de interacción competitiva. Esta interacción no tiene por qué ser simétrica, de modo que los coeficientes pueden ser distintos. Obviamente este modelo asume que no existen interacciones competitivas de orden superior (entre más de 2 especies), lo que simplifica el tratamiento mate-

² Como puede comprobarse la relación entre los coeficientes a_{ij} y a'_{ij} es la siguiente: $a_{ij} = a'_{ij} \cdot r_i$.

mático y empírico. Otra hipótesis implícita es que las tasas de crecimiento e interacciones competitivas permanecen constantes a lo largo del tiempo, lo que en la práctica no resulta demasiado realista, como tampoco lo es el no considerar retardos temporales (PIANKA, 1982: 172).

Otro problema, que comparte con la generalización del modelo de Bass, es el indicado por KRISHNAN *et al.*, (2000): el mercado potencial restante para un determinado producto debe considerar también el número de usuarios de otras tecnologías rivales, por lo que una aproximación más realista vendría dada por la siguiente expresión:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot \left[1 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) - \left(\sum_{j \neq i} a'_{ij} \cdot x_j \right) \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

A fin de comprender los mecanismos básicos del modelo ³, merece la pena analizar el comportamiento del caso más sencillo posible: la competencia entre dos tecnologías. En este caso el sistema de ecuaciones queda reducido a la siguiente expresión:

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1 - a'_{12} \cdot x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_2 - a'_{21} \cdot x_1)$$

En este caso particular se identifican 4 escenarios posibles:

1. **Escenario 1.** Competencia igualada en presencia de débiles Efectos de Red ($a'_{12} < 1$ y $a'_{21} < 1$).

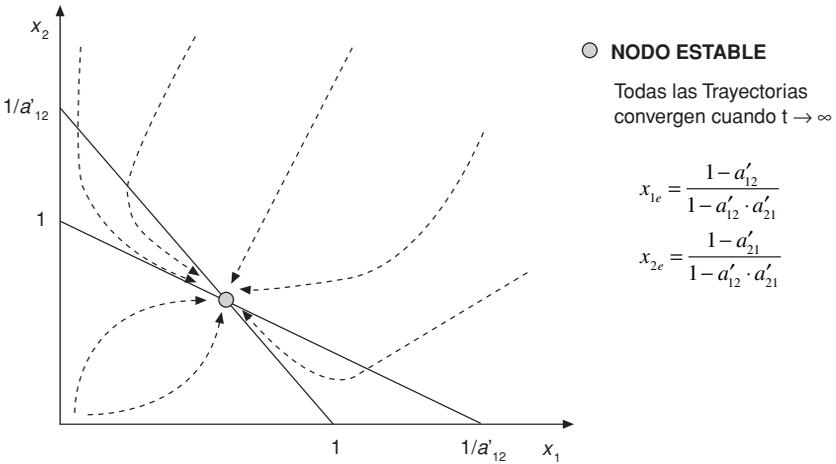
En este caso la competencia no es excesiva, es decir, el efecto inhibitor del estándar rival es menor que el efecto del propio crecimiento. Por tanto es posible una coexistencia a largo plazo, como se aprecia en la figura 6.4. El punto de equilibrio o nodo estable indica las cuotas de mercado a que convergen ambos estándares. Cuanto mayor sea el efecto inhibitor de la tecnología x_2 sobre la x_1 (mayor coeficiente a'_{12}), menor será la cuota de mercado final de x_1 y viceversa, es decir, el equilibrio final dependerá del efecto de la interacción entre ambas tecnologías. La definición adoptada hace que las cuotas de mercado en el equilibrio final no sumen uno en el caso general (CHEN, 2002), ya que es posible que haya clientes que utilicen de forma simultánea las dos tecnologías.

Se pueden identificar este tipo de comportamientos con estrategias de transición (ver capítulo III), en las que el nuevo estándar sigue

³ Se estudiará el modelo original de Lotka-Volterra.

siendo compatible con el existente, por lo que es posible una coexistencia de ambos, aunque a largo plazo el punto de equilibrio se desplace hacia cuotas de mercado cada vez más diferentes. También puede darse en casos en los que haya grupos de usuarios con percepciones muy diferentes sobre las expectativas y valor de cada uno de los estándares rivales.

FIGURA 6.4
 MODELO LOTKA-VOLTERRA
 DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA: ESCENARIO 1

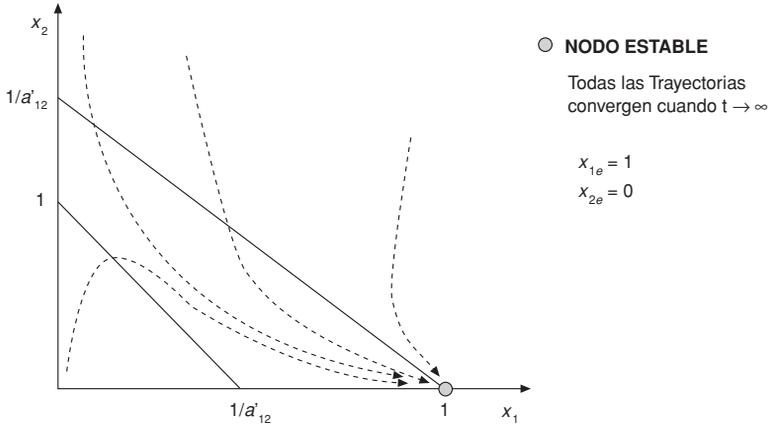


Fuente: ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004).

2. **Escenario 2.** Competencia no igualada a favor de x_1 ($a'_{12} < 1$ y $a'_{21} > 1$).

En este caso la superioridad del estándar x_1 hace que, con independencia de las cuotas de mercado iniciales, termine haciéndose con la totalidad del mercado, eliminando por completo al estándar x_2 . Es posible identificar este caso con la aplicación de estrategias de discontinuidad (capítulo III) en las que el triunfo de una tecnología, debido a su incompatibilidad, da lugar a la desaparición de la otra. Este modelo podría representar adecuadamente la situación actual entre los vídeos VHS y los DVDs: pese a que la cuota inicial de mercado de VHS es muy superior a la de los DVDs, sus mayores prestaciones y expectativas de éxito han iniciado una evolución del mercado que concluirá con la desaparición a largo plazo de los vídeos convencionales (figura 6.5).

FIGURA 6.5
 MODELO LOTKA-VOLTERRA DE
 COMPETENCIA INTERESPECÍFICA: ESCENARIO 2

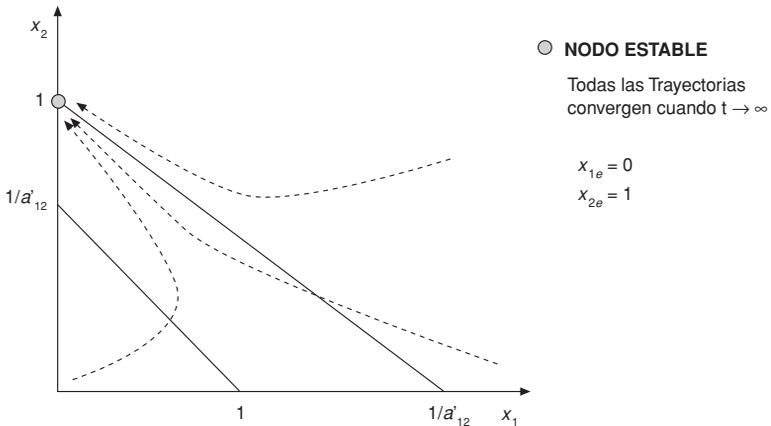


Fuente: ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004).

3. **Escenario 3.** Competencia no igualada a favor de x_2 ($a'_{12} > 1$ y $a'_{21} < 1$).

Es el caso simétrico al anterior, de modo que el estándar x_2 acabará desplazando a largo plazo al estándar x_1 (figura 6.6).

FIGURA 6.6
 MODELO LOTKA-VOLTERRA
 DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA: ESCENARIO 3



Fuente: ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004).

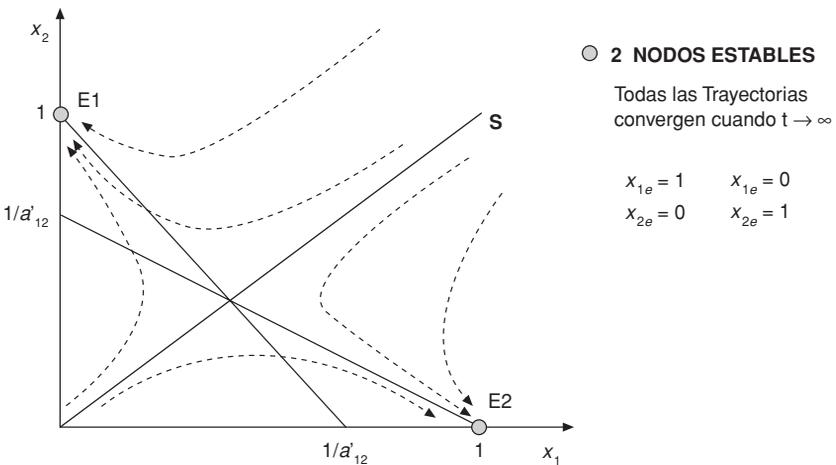
4. **Escenario 4.** Competencia igualada en presencia de fuertes Efectos de Red ($a'_{12} > 1$ y $a'_{21} > 1$).

Quizá sea el caso más interesante en cuanto a la representación de fenómenos reales ya que el equilibrio final depende tanto de las características de los estándares como de la cuota inicial de mercado de cada uno de ellos. Representa situaciones en las que existe un equilibrio, no existiendo una ventaja excesiva de ninguna de las dos tecnologías rivales. En este caso el diagrama de fases queda dividido en dos regiones por la recta S , que une el origen con el punto de intersección de las rectas $1 - x_1 - a'_{12} \cdot x_2 = 0$ y $1 - x_2 - a'_{21} \cdot x_1 = 0$ (figura 6.7).

Tenemos dos puntos de equilibrio diferentes: uno en el que el estándar x_1 obtiene la totalidad del mercado y otro en el que sucede lo contrario. El factor determinante en este caso es la base instalada de clientes (cuota de mercado inicial) de cada uno de ellos. Si el punto que representa la cuota inicial se encuentra por encima de la línea S , la tecnología x_2 resultará vencedora, y si se encuentra por debajo ocurrirá lo contrario. Por tanto la recta S representa la frontera límite que separa la masa crítica relativa de usuarios, y una vez superada en uno u otro sentido, el proceso de eliminación de uno de los dos estándares es irreversible. La mayor o menor pendiente de S viene determinada por las características de cada una de las tecnologías.

FIGURA 6.7

MODELO LOTKA-VOLTERRA
DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA: ESCENARIO 4

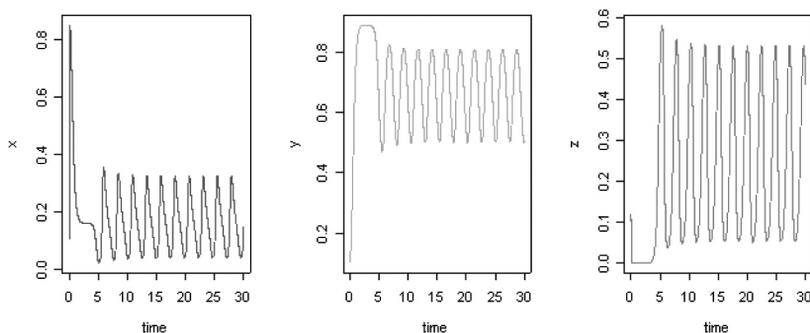


Fuente: ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004).

El caso analizado (competencia entre 2 estándares) es el más sencillo posible. Sin embargo es viable analizar escenarios de mayor dimensión, en los que lógicamente el comportamiento puede ser mucho más complejo. En este sentido es preciso indicar que para dimensión 3 pueden aparecer comportamientos cíclicos, como se muestra en la figura 6.8 (tecnologías x, y, z).

FIGURA 6.8
 COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA LOTKA-VOLTERRA
 DE COMPETENCIA INTERESPECÍFICA PARA CIERTA
 COMBINACIÓN DE PARÁMETROS Y 3 TECNOLOGÍAS

$$a'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 18/19 & 16/19 \\ 19/27 & 1 & 8/9 \\ 19/12 & 9/12 & 1 \end{pmatrix}; \quad r_i = \begin{pmatrix} 361 \\ 27/2 \\ 48 \end{pmatrix}$$



Fuente: Elaboración Propia (algoritmo programado en «R»).

Como señala CASTIAUX (2004), estas ecuaciones (tanto en su versión competitiva como simbiótica) están adquiriendo un creciente interés entre la comunidad académica para representar fenómenos de sustitución tecnológica, el cambio organizativo o el aprendizaje organizativo. En este sentido merece la pena destacar que modelos con una filosofía similar también han sido empleados para representar el impacto del software pirata en las ventas legales del producto (GIVON *et al.*, 1995).

Por último indicar que, como ya se mencionó anteriormente, es frecuente que los modelos de competencia sean generalizaciones de los modelos de difusión, y en el caso del modelo de Lotka-Volterra que acaba de analizarse, es inmediato comprobar que se trata de una generalización del modelo de difusión logística. En este sentido, otros modelos de difusión pueden ser generalizados de forma análoga, como ocurre en el caso que se estudiará a continuación.

B) Modelo de Mahajan y Peterson

Este modelo fue propuesto por MAHAJAN y PETERSON (1978b) como una generalización del modelo de difusión de Bass. Su formulación es la siguiente:

$$\frac{dx_i}{dt} = (1 - x_i) \cdot \left(a_i + b_i \cdot x_i + \sum_{j \neq i} c_{ij} \cdot x_j \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

En este caso la interpretación de los coeficientes es similar a la del modelo de Bass: a_i serían los coeficientes de innovación, b_i los coeficientes de imitación y c_{ij} los coeficientes de competencia o complementariedad. Es preciso destacar que este modelo puede ser interpretado también en términos de cooperación sin más que cambiar el signo de los coeficientes c_{ij} : si son positivos se trata de un modelo de cooperación y si son negativos de un modelo de competencia.

Un problema de este modelo, que comparte con el de Lotka-Volterra, es que (en el caso de competencia) el incremento de usuarios de una tecnología frena el crecimiento de las otras a través de los coeficientes c_{ij} , pero las tecnologías no se roban clientes entre sí. Esto se debe al término $1 - x_i$, que recoge la realimentación negativa de la propia tecnología (competencia intraespecífica): el número de clientes potenciales que quedan por adquirir la tecnología sólo depende de la diferencia entre la cuota máxima (que es igual a 1) y la cuota actual (x_i), de modo que no se ve afectado por las cuotas del resto de tecnologías. Por este motivo han surgido modelos más realistas como el que se detalla a continuación.

C) Modelo de Altinkemer *et al.*

Este modelo, propuesto por ALTINKEMER *et al.*, (2003) trata de introducir el efecto del robo de clientes entre tecnologías. Esto hace que la suma de las cuotas de mercado en tanto por uno de todas las tecnologías sea exactamente 1, lo que no ocurría con los modelos precedentes (que contemplaban la posibilidad de que varios usuarios adquiriesen varias de las tecnologías en competencia).

Puesto que el modelo original fue formulado en número de adoptantes y no en cuota de mercado en tanto por uno, se ha optado por mantener este criterio. Para formular el modelo en tanto por uno bastaría con dividir el resultado por el mercado total en cada instante. A continua-

ción se muestra la formulación del modelo para el caso general de competencia entre N estándares tecnológicos.

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(M(t) - \sum_{j=1}^N x_j \right) \cdot \left(a_i + \frac{b_i}{M(t)} \cdot x_i - \sum_{j \neq i} \frac{c_{ij}}{M(t)} \cdot x_j \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Este modelo permite además que el número total de potenciales adoptantes, $M(t)$, varíe con el tiempo. Estos autores proponen de hecho dos alternativas diferentes:

$$M(t) = m_0 + \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i(t)}{\bar{M}} \right)^{-1/k} \cdot (\bar{M} - m_0) \quad 0 < k < 1$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = f(m_0) \quad M(t) \leq \bar{M}$$

\bar{M} representa el máximo número de adoptantes, m_0 el máximo número de adoptantes inicial y k es el factor de crecimiento de la base de potenciales adoptantes. La primera ecuación asume que el número de potenciales adoptantes se incrementa con el número de usuarios, introduciendo de esta manera el efecto de las Externalidades de Red.

Este modelo sin embargo también presenta una serie de debilidades, y probablemente la más grave es que se asume que los usuarios no abandonan una tecnología una vez que la han adquirido.

4. MODELOS DE MUTUALISMO

El término mutualismo hace referencia a una relación interespecífica en la que las dos especies implicadas se ven beneficiadas. Al margen de la distinción entre simbiosis y comensalismo que se emplea en la literatura relacionada con la biología teórica, en este libro se emplearán las definiciones habituales en el ámbito de la ecología de organizaciones (ver por ejemplo BARNETT y CARROLL, 1987). De este modo la **simbiosis** estaría basada en la interdependencia positiva derivada de diferencias complementarias (p.e. las relaciones de un productor con sus proveedores y distribuidores) y el **comensalismo** sería una interdependencia positiva que surge como consecuencia de semejanzas suplementarias (p.e. organizaciones similares que trabajan conjuntamente en una determinada acción política). De este modo, puesto que el principal interés de los modelos que se analizarán a continuación se centra en represen-

tar la interacción entre productos complementarios, se hablará de relaciones simbióticas.

El mutualismo no ha sido tan estudiado como otro tipo de interacciones (MURRAY, 2002: 99), por lo que se analizarán únicamente dos de los modelos más conocidos.

A) Lotka-Volterra de simbiosis sin competencia intraespecífica

Este modelo es análogo al sistema Lotka-Volterra depredador-presa, pero considerando una interacción positiva entre las diferentes especies, de modo que la expresión general de este tipo de modelos es la siguiente (MURRAY, 2002: 99):

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i + x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$a_{ij} > 0$$

No merece la pena insistir demasiado en las propiedades de este modelo, ya que se trata de un modelo poco realista en tanto que no existe competencia intraespecífica. Por este motivo resulta más razonable plantear un modelo como el que se propone a continuación.

B) Lotka-Volterra de simbiosis con competencia intraespecífica

De forma similar al caso anterior, se trata de un modelo análogo al de competencia interespecífica de Lotka-Volterra pero considerando una interacción positiva entre especies, quedando el modelo expresado del siguiente modo (MURRAY, 2002: 100):

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot \left(1 - x_i + \sum_{j \neq i} a'_{ij} \cdot x_j \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$a_{ij} > 0$$

Este modelo presenta una importante diferencia respecto al modelo original de competencia en el que se basa: debido a la interacción positiva entre las distintas tecnologías es posible un crecimiento incontrolado bajo ciertas circunstancias. Para analizar este efecto se estudiará el caso particular de dos estándares, en el que el modelo queda reducido al siguiente sistema:

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1 + a'_{12} \cdot x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_2 + a'_{21} \cdot x_1)$$

$$a_{12}, a_{21} > 0$$

1. **Escenario 1.** Efecto simbiótico fuerte ($a'_{12} \cdot a'_{21} > 1$).

En este caso se produce un crecimiento ilimitado de las cuotas de mercado de ambos estándares. Este comportamiento resulta poco realista en sistemas reales y por tanto no se trata de un escenario que merezca la pena analizar en detalle.

2. **Escenario 2.** Efecto simbiótico débil ($a'_{12} \cdot a'_{21} < 1$).

Las dos tecnologías tienden a un equilibrio estable determinado por los valores de los parámetros de las ecuaciones. Este equilibrio es independiente de las cuotas de mercado iniciales consideradas, y se verifica que en dicho equilibrio ambas cuotas de mercado son superiores a 1⁴. Desde el punto de vista del efecto de los productos complementarios en presencia de Efectos de Red, este comportamiento podría interpretarse del siguiente modo: siendo x_1 la tecnología considerada y x_2 la tecnología complementaria, el efecto simbiótico entre ambas da lugar a un crecimiento de la cuota de mercado de ambas que hace que el número de productos vendidos exceda al número de usuarios como consecuencia de dicho efecto simbiótico.

C) Otros modelos

KUMAR y KRISHNAN (2002), partiendo del modelo de Bass generalizado, propusieron un modelo de difusión de innovaciones en el que, al introducir un determinado producto en un país, su evolución se veía condicionada por la evolución del mismo en otros países diferentes. El modelo está centrado en la importancia de la inversión en marketing, por lo que no aporta elementos relevantes para la presente investigación, pero constituye un buen ejemplo de que no sólo la ecuación logística puede ser generalizada a esquemas simbióticos de dimensión superior.

⁴ Esto puede interpretarse como el hecho de que algunos usuarios adquieran más de un producto. Por ejemplo, en el caso de los reproductores de DVDs un individuo puede comprar más de un reproductor, con lo que el número de productos vendidos excederá al número de usuarios.

5. MODELOS DE INFECCIÓN

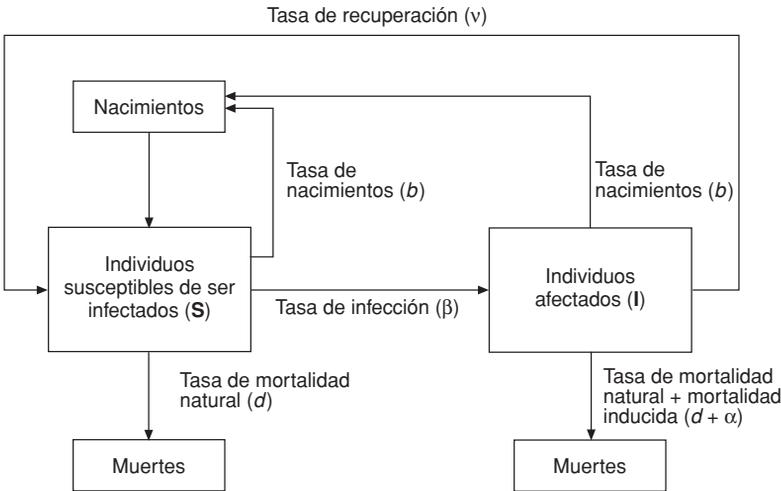
Los modelos de infección permiten ilustrar ciertos mecanismos interesantes para el estudio de los mercados de redes. Por ejemplo Hivner *et al.*, (2003) emplearon un modelo de este tipo para representar el proceso de difusión de ideas innovadoras entre distintas organizaciones.

Ciertamente el proceso de contagio presenta similitudes con el proceso de comunicación boca-a-oido que se produce en la difusión tecnológica. Del mismo modo la recuperación de individuos infectados es equivalente, en términos matemáticos, al abandono de una determinada tecnología. En este sentido merece la pena destacar que, por ejemplo, el modelo SIR que se estudiará a continuación representa la tasa de recuperación de individuos infectados de forma idéntica a la manera en que se expresaba en el modelo de Bass con deserciones la tasa de abandono de la tecnología.

A) El modelo SI con transmisión dependiente de la densidad

Es probablemente uno de los modelos de infección parasitaria más sencillo que puede formularse, y se basa en el mecanismo mostrado en la figura 6.9 (ALSTAD, 2001: 116-122). El proceso queda expresado mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

FIGURA 6.9
ESQUEMA DE UN PROCESO SI
CON TRANSMISIÓN DEPENDIENTE DE LA DENSIDAD



Fuente: ALSTAD (2001: 117).

$$\frac{dS}{dt} = b \cdot (S + I) + v \cdot I - d \cdot S - \beta \cdot S \cdot I$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - (\alpha + d + v) \cdot I$$

El término de transmisión, $\beta \cdot S \cdot I$, incluye la tasa de encuentros entre individuos susceptibles e infectados (dada por el producto $S \cdot I$), así como la probabilidad de transmisión en el encuentro (β). Es inmediato comprobar que el número total de individuos (N) varía según la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = (b - d) \cdot N - \alpha \cdot I$$

B) El modelo SIR

En este caso se introduce una tercera categoría de individuos, asumiendo por tanto que aquellos que se recuperan de la infección no vuelven a contraerla. El mecanismo en este caso es el siguiente: los individuos susceptibles de ser contagiados (S), pueden ser infectados por otros que ya lo están (I), y de forma análoga los individuos infectados pueden recuperarse quedando de este modo inmunizados (R). Esquemáticamente esto queda representado por el proceso $S \rightarrow I \rightarrow R$, siendo $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ el número de individuos susceptibles, infectados y recuperados respectivamente. El modelo queda formulado del siguiente modo (MURRAY, 2002: 320):

$$\frac{dS}{dt} = -r \cdot S \cdot I$$

$$\frac{dI}{dt} = r \cdot S \cdot I - a \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = a \cdot I$$

$$S(0) = S_0 > 0$$

$$I(0) = I_0 > 0$$

$$R(0) = 0$$

Obviamente $S(t) + I(t) + R(t) = N$, siendo N el tamaño total de la población. En este caso r es el ratio de infección y a el ratio de recuperación (siendo ambas constantes positivas). Este último parámetro se interpreta como el inverso del tiempo promedio que dura la infección. Como puede verse el número de infectados en cada ins-

tante de tiempo depende de la interacción entre susceptibles e infectados ($r \cdot S \cdot I$).

Otro aspecto muy interesante de este modelo es que, al igual que ocurre con las Externalidades de Red, hay un umbral mínimo que desencadena la epidemia. Como se detalló en el capítulo III, la difusión de una tecnología sujeta a Efectos de Red sólo era posible si lograba alcanzarse la masa crítica de usuarios que desencadenaba el proceso de adopción masiva. Curiosamente este modelo de infección parasitaria muestra un comportamiento similar: si el número inicial de individuos susceptibles a la infección, S_0 , es superior al ratio a/r , entonces se produce una epidemia (el número de infectados supera en algún momento al número inicial de infectados). Es decir:

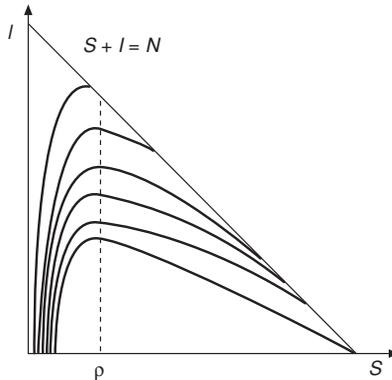
$$\text{Si } S_0 < \frac{a}{r} \Rightarrow I_0 > I(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{No se produce epidemia}$$

$$\text{Si } S_0 > \frac{a}{r} \Rightarrow I(t) > I_0 \text{ Para algún } t \Rightarrow \text{Se produce epidemia}$$

Por tanto el parámetro crítico es el ratio $\rho = a/r$. La figura 6.10 muestra el comportamiento del sistema, y se aprecia que para valores de S_0 superiores a ρ efectivamente se produce una epidemia.

Este tipo de modelos se emplean con frecuencia en el campo de la Econofísica para el estudio de las redes complejas (ver por ejemplo ZHOU *et al.*, 2005; GÓMEZ-GARDEÑAS *et al.*, 2005; MASUDA y CONO, 2005) o para representar fenómenos como la difusión de ideas en una sociedad (BETTENCOURT *et al.*, 2005).

FIGURA 6.10
EVOLUCIÓN DE UN SISTEMA SIR



Fuente: Adaptado de MURRAY (2002: 321).

C) El modelo SIR con transmisión dependiente de la densidad

Es posible mejorar el modelo SIR introduciendo hipótesis más realistas, como por ejemplo una determinada tasa de nacimientos y muertes. En este sentido, el modelo SIR con transmisión dependiente de la densidad es similar al modelo SI pero introduciendo la categoría de individuos recuperados (ver figura 6.11). El sistema de ecuaciones diferenciales que representa el proceso en este caso es el siguiente (ALSTAD, 2002: 126):

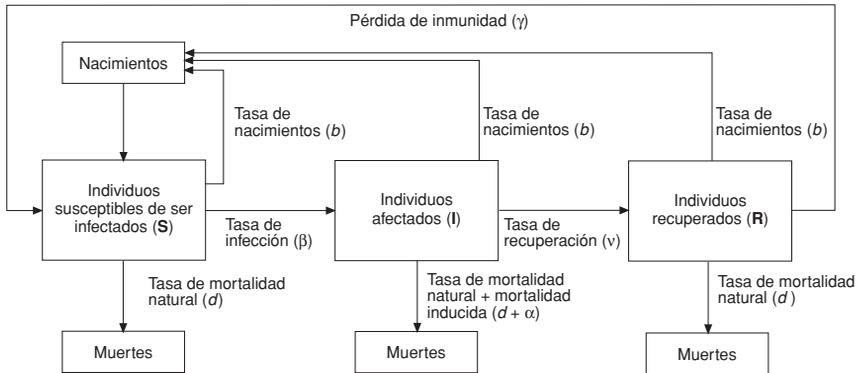
$$\frac{dS}{dt} = b \cdot (S + I + R) - d \cdot S - \beta \cdot S \cdot I + \gamma \cdot R$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \cdot S \cdot I - (\alpha + d + \nu) \cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = \nu \cdot I - (d + \gamma) \cdot R$$

FIGURA 6.11

PROCESO SIR CON TRANSMISIÓN DEPENDIENTE DE LA DENSIDAD



Fuente: ALSTAD (2001: 125).

D) El modelo dependiente de la edad

Es posible introducir supuestos más realistas en el modelo de infección, como por ejemplo la idea de una población estructurada por edades en la que los efectos son diferentes en función de la edad de los individuos. El caso que se analizará a continuación considera que el proceso de infección depende de la edad (e) de los individuos infectados. De este

modo la variación del número de individuos susceptibles de ser contagiados sigue la siguiente ecuación:

$$\frac{dS}{dt} = - \left[\int_0^{\tau} r(e') \cdot I(e', t) \cdot de' \right] \cdot S$$

$$S(0) = S_0$$

Por otra parte el número de individuos infectados puede expresarse del siguiente modo:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial e} = -\lambda(e) \cdot I$$

$$I(e, 0) = I_0(e)$$

$$I(0, t) = -\frac{dS}{dt}, \quad t > 0$$

Como puede verse, aparecen de nuevo ecuaciones integrodiferenciales, al igual que ocurría en el modelo de difusión tecnológica propuesto por De CÉSARE y Di LIDDO (ver capítulo V), aunque en este caso el enfoque es diferente. Al margen de los aspectos más técnicos del modelo, lo relevante para el estudio de los mercados de redes es la forma en que se considera la posibilidad de que la población no sea homogénea en cuanto a su susceptibilidad al contagio. Por tanto, con formulaciones similares, sería posible incluir en un modelo de difusión / competencia tecnológica supuestos más realistas sobre la heterogeneidad de la población. En este caso se emplea la edad como variable de clasificación de la población, pero en la práctica es posible emplear cualquier otra variable, como la propensión al consumo de una nueva tecnología.

6. OTROS MODELOS

En el ámbito de la biología teórica existen multitud de modelos adicionales basados en la Teoría de Sistemas Dinámicos, aplicados a interacciones tan diversas como la existente entre vegetación y herbívoros (ver por ejemplo CAUGHLEY y LAWTON, 1981: 132-177) o a la depredación entre artrópodos (HASSELL, 1981: 105-131). En este capítulo nos hemos limitado a mencionar algunos de los modelos que presentan ciertas características relevantes para el estudio de los mercados de redes, pero el lector interesado en profundizar en el tema puede consultar cualquiera de los numerosos manuales de Biología Teórica que tratan este tipo de modelos.

7. CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo hemos analizado diferentes modelos, la mayoría de ellos procedentes del campo de la Biología Teórica, capaces de representar interacciones de interés para el estudio de los mercados de redes (de depredación, competitivas, cooperativas y de infección). No hemos tratado cada uno de ellos en demasiado detalle, ya que esto excedería los objetivos del libro. Simplemente se ha tratado de poner de manifiesto que dichos modelos presentan ciertas propiedades que pueden ser empleadas para modelizar mercados de redes.

En este caso destacaremos cuatro conclusiones especialmente relevantes:

- Los efectos de la **depredación** reflejan el modo en que el crecimiento de una población incide negativamente en el crecimiento de otra. Este efecto es similar al que se produce en la dinámica competitiva en mercados de redes: al aumentar la cuota de mercado de un estándar tecnológico, sus expectativas de éxito aumentan mientras disminuyen las de su rival. Por tanto los términos de las ecuaciones depredador-presa que recogen estos efectos pueden ser aplicables a la modelización de la competencia en mercados de redes. Únicamente es necesario plantearse cuál de las funciones $R(x)$ analizadas en el apartado 2.C) refleja con mayor precisión la naturaleza de esta interacción.

- Los modelos de **competencia interespecífica** surgen habitualmente como una generalización de los modelos de difusión estudiados en el capítulo V. El sistema de Lotka-Volterra aparece como una generalización de la ecuación logística, y los modelos de Mahajan y Peterson y de Altinkemer *et al.*, como una generalización de la ecuación de Bass. Estos modelos podrían ser aplicados directamente a modelizar la interacción competitiva entre estándares rivales en mercados de redes, tal y como plantean por ejemplo LÓPEZ *et al.*, (2003) y LÓPEZ y SANJUAN (2001).

- Muchos de los modelos de competencia interespecífica pueden reformularse en términos de **simbiosis**, cambiando simplemente el signo de los coeficientes de interacción. Esto ocurre con los dos modelos analizados, así como con el de MAHAJAN y PETERSON (1978b) que se estudió en el apartado 3.B). Los efectos simbióticos que se han estudiado pueden servir para representar la relación existente entre los estándares tecnológicos y sus productos complementarios. De hecho el círculo virtuoso que se produce entre ellos y que fue mencionado en el capítulo II está basado en un mecanismo idéntico al que reflejan los modelos de simbiosis estudiados.

- Respecto a los modelos de **infección parasitaria**, cabe destacar varios aspectos. En primer lugar que el proceso de contagio se suele modelizar mediante el producto de las densidades de individuos susceptibles e infectados. Por otra parte, el proceso de recuperación en un esquema de infección parasitaria tipo SIR se modeliza de forma idéntica al proceso de abandono de una tecnología en el modelo de Bass con deserciones, y además en dicho modelo aparece, al igual que ocurre en los mercados de redes, una masa crítica que ha de sobrepasarse para que se genere una epidemia. En caso de no sobrepasar dicho umbral, el número de infectados disminuye y desaparece, exactamente como ocurre en el caso de una tecnología que no alcanza la masa crítica de usuarios. Por último indicar que el modelo dependiente de la edad incorpora un elemento de interés: la estructuración por edades de la población. Como ya se analizó en el capítulo V, en el proceso de adopción tecnológica, no todos los colectivos tendrán la misma predisposición a adquirir la tecnología. Del mismo modo, el proceso de comunicación boca-a-oido tampoco tiene por qué ser homogéneo, ya que determinados colectivos pueden ser más propensos que otros a difundir la tecnología, y en este sentido el esquema matemático propuesto por éste modelo puede servir para introducir este tipo de matices. Aunque el modelo original trabaja con la edad como variable relevante, es posible aplicar el mismo modelo empleando cualquier otra.

CAPÍTULO VII

ALGUNOS EJEMPLOS

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se analizarán las características de algunos modelos formulados específicamente para el estudio de los mercados de redes. El análisis exhaustivo de cada uno de ellos es relativamente complejo y excede los objetivos de este libro, por lo que nos centraremos en estudiar algunas de sus características más interesantes, planteando una serie de preguntas que quedan abiertas para futuros trabajos de investigación.

1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo supone de alguna manera la síntesis de todo el análisis desarrollado hasta el momento. Iremos viendo cómo, introduciendo diferentes elementos, se pueden formular modelos de competencia en mercados de redes. El objetivo perseguido es, únicamente, mostrar algunos ejemplos que sirvan de inspiración para futuras investigaciones en este campo.

No analizaremos en detalle cada uno de los modelos planteados, sino que se darán algunas pinceladas a fin de poner de manifiesto sus características más relevantes y cómo debería abordarse un estudio en profundidad de los mismos. Para ello seguiremos el siguiente esquema.

- En el *apartado 2* se analizan los dos posibles modelos que podrían servir como punto de partida: la generalización del modelo Gompertz

de difusión (estudiado en el capítulo V) y las ecuaciones de Lotka-Volterra de competencia interespecífica (estudiadas en el capítulo VI).

- En el *apartado 3* se proponen dos mejoras al modelo de Lotka-Volterra, siendo la más relevante la efectuada a fin de reflejar los efectos de la congestión. Trataremos con algo de detalle una de las características más interesantes que presenta este modelo: su sensibilidad a las condiciones iniciales.

- En el *apartado 4* se plantea otro modelo que incorpora el efecto de los productos complementarios.

El análisis realizado en cada apartado ha requerido la programación de una serie de algoritmos de simulación numérica. En todos los algoritmos, la parte correspondiente a la resolución numérica del sistema de ecuaciones se ha realizado según el método de Runge-Kutta de orden 4, que se describió detalladamente en el capítulo IV, y utilizando «R» como entorno de programación (ver Anexo 1).

2 . MODELO BASE

Como se indicó en el capítulo V, los modelos de difusión Logístico y Gompertz son los más habitualmente empleados. Por otra parte, como se estudió en el capítulo VI, algunos investigadores han aplicado el modelo de Lotka-Volterra, que no es sino una generalización del Logístico a procesos de competencia. Sin embargo también tendría sentido plantear de forma análoga un modelo de competencia a partir de, por ejemplo, el modelo Gompertz de difusión, que junto al logístico es el más conocido y empleado.

No se han identificado trabajos que opten por este enfoque, por lo que resulta necesario analizar cuáles son sus propiedades antes de descartar el desarrollo de un modelo de competencia tipo Gompertz. En este sentido a continuación se estudian las propiedades de ambos modelos, evaluando cuál de los dos constituye un mejor punto de partida. No se realizará un análisis exhaustivo de ambos, sino que únicamente evaluaremos el cumplimiento de la característica básica de los mercados de redes: evolución temporal de tipo sigmoideal.

A) Generalización del modelo Gompertz

En base al modelo Gompertz, y siguiendo un planteamiento similar al de ARROYO BARRIGÜETE y LÓPEZ SÁNCHEZ (2004), es posible plantear el siguiente esquema competitivo:

EC. GOMPERTZ *MODELO DE COMPETENCIA*

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \text{Ln}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot \text{Ln}\left(\frac{1}{x_i}\right) - x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j \\ i, j = 1, 2, \dots, n \\ a_{ij}, r_i > 0 \quad \forall i, j \end{cases}$$

Siendo x_i la cuota de mercado en tanto por uno del estándar tecnológico i -ésimo, r_i el parámetro de crecimiento propio del estándar tecnológico i -ésimo y a_{ij} el parámetro de interacción competitiva entre los estándares i -ésimo y j -ésimo. Adicionalmente ha de imponerse la condición de que todos los elementos a_{ij} sean positivos (competencia pura), ya que la existencia de componentes negativos implicaría la aparición de estrategias cooperativas (simbiosis) entre diferentes tecnologías, y en estos momentos no se estudiará esa posibilidad.

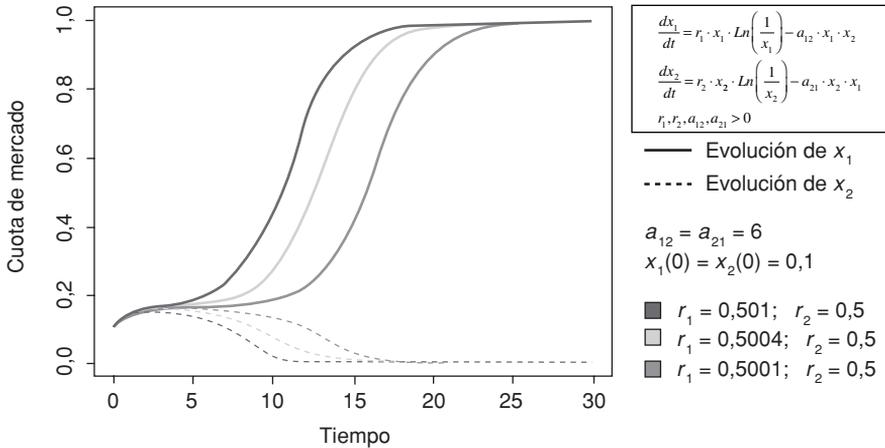
Puesto que las propiedades matemáticas de este modelo son sumamente complejas de analizar en términos generales, se limitará el estudio al caso particular de competencia entre dos estándares tecnológicos, quedando entonces el modelo reducido a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r_1 \cdot x_1 \cdot \text{Ln}\left(\frac{1}{x_1}\right) - a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 \cdot x_2 \cdot \text{Ln}\left(\frac{1}{x_2}\right) - a_{21} \cdot x_2 \cdot x_1 \end{aligned} \tag{7.1}$$

La primera condición que debe cumplir el modelo es que la evolución temporal del estándar tecnológico vencedor ha de ser de tipo sigmoideal, y cuanto mayor sea la diferencia entre los estándares rivales, más rápido será su crecimiento. Pese a partir de un modelo de difusión de tipo sigmoideal, no existen garantías de que al ser generalizado a un modelo de competencia éste siga manifestando dicho comportamiento, de modo que es necesario evaluar el cumplimiento de esta condición.

En este sentido la figura 7.1 muestra los resultados obtenidos tras resolver el modelo para distintos valores de sus parámetros, y como puede comprobarse se aprecia una evolución sigmoideal para los valores considerados. Además, a medida que se incrementan las diferencias entre los dos estándares (coeficientes r_i), más rápido es el proceso. Sin embargo esta evolución sólo se da bajo unas condiciones muy estrictas, tal y como se estudiará más adelante.

FIGURA 7.1
EVOLUCIÓN SIGMOIDAL
DEL MODELO DE COMPETENCIA TIPO GOMPERTZ (I)

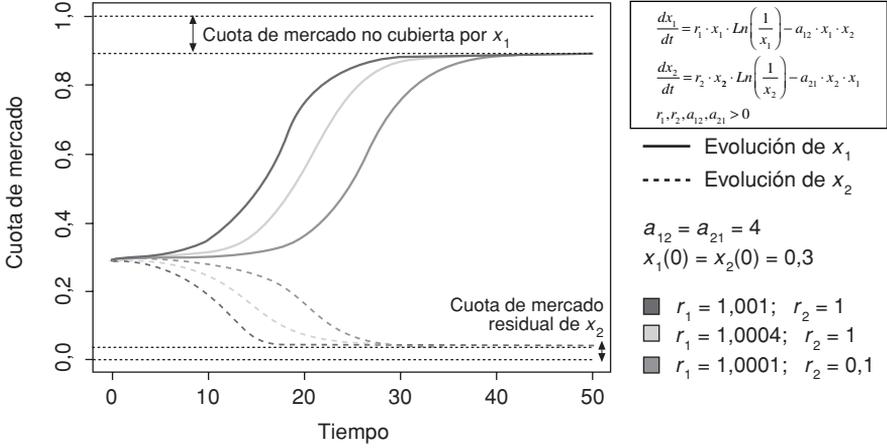


Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

Adicionalmente merece la pena destacar una diferencia significativa respecto al modelo de Lotka-Volterra. El modelo de Lotka-Volterra, al imponer condiciones de competencia intensa ($a_{ij} > r_i$), sólo permite a largo plazo un equilibrio estable en el que una de las tecnologías alcanza una cuota de mercado igual a 1 y la otra igual a 0. Sin embargo el modelo propuesto se comporta de manera diferente, ya que incluso en condiciones de competencia intensa ($a_{ij} > r_i$), si los parámetros adoptan determinados valores, el equilibrio final no implica la adopción total del estándar vencedor y la desaparición completa del estándar perdedor. Es decir, eligiendo adecuadamente los valores de los parámetros, el equilibrio final viene dado por una adopción parcial del estándar vencedor (cuota final de equilibrio menor que 1) y la supervivencia del estándar inferior con una reducida cuota de mercado (figura 7.2).

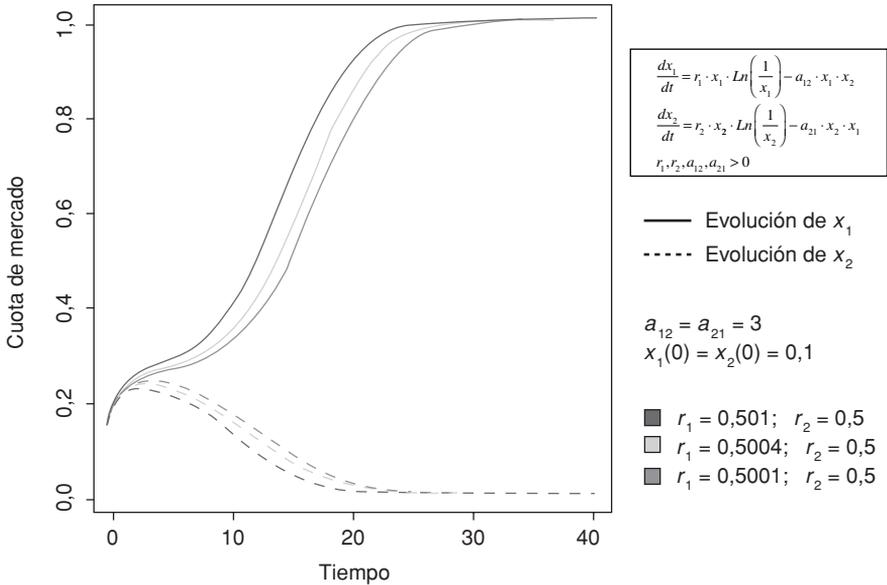
Sin embargo el modelo presenta un importante problema, que quizá haya sido la causa por la que no se han desarrollado investigaciones en base al mismo: la evolución temporal en las etapas iniciales es un tanto irregular. La evolución sigmoide sólo aparece si el valor de los coeficientes a_{ij} es significativamente mayor que el de los coeficientes r_i . En caso contrario, durante la etapa inicial, aparece un súbito incremento de las cuotas de mercado de ambas tecnologías que no coincide con lo que cabría esperar desde un punto de vista teórico. La figura 7.3 ilustra este comportamiento: disminuyendo el valor de los coeficientes a_{ij} de 6 (que

FIGURA 7.2
EVOLUCIÓN SIGMOIDAL
DEL MODELO DE COMPETENCIA TIPO GOMPERTZ (II)



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

FIGURA 7.3
EVOLUCIÓN SIGMOIDAL
DEL MODELO DE COMPETENCIA TIPO GOMPERTZ (III)



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

son los valores usados en la figura 7.1) a 3, y manteniendo el mismo valor para los coeficientes r_i aparece el mencionado pico irregular.

Tras un primer análisis podría plantearse que este problema puede solucionarse sin más que imponer condiciones adicionales sobre los parámetros a_{ij} . Sin embargo ésta no es una solución factible, ya que de hacerlo, la gran diferencia respecto a los parámetros r_i disminuiría significativamente el impacto de estos últimos en el modelo, lo que no resulta realista.

Por tanto, al no verificar este modelo condición de evolución sigmoïdal dentro de un rango de valores razonable, no merece la pena profundizar en el estudio del resto de propiedades que habría de cumplir, y es preciso abandonarlo.

B) Generalización del modelo logístico: ecuaciones de Lotka-Volterra

Las ecuaciones de Lotka-Volterra de competencia interespecífica, como ya se mencionó en el capítulo VI, son una generalización de la ecuación logística de difusión:

$$\begin{array}{ll}
 \text{EC. LOGÍSTICA} & \text{MODELO DE COMPETENCIA} \\
 \frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot (1-x) & \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = r_i \cdot x_i \cdot (1-x_i) - x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j \\ i = 1, 2, \dots, n \\ a_{ij}, r_i > 0 \quad \forall i, j \end{cases}
 \end{array}$$

Siendo, al igual que en el modelo tipo Gompertz, x_i la cuota de mercado en tanto por uno del estándar tecnológico i -ésimo, r_i el parámetro de crecimiento propio del estándar tecnológico i -ésimo y a_{ij} el parámetro de interacción competitiva entre los estándares i -ésimo y j -ésimo.

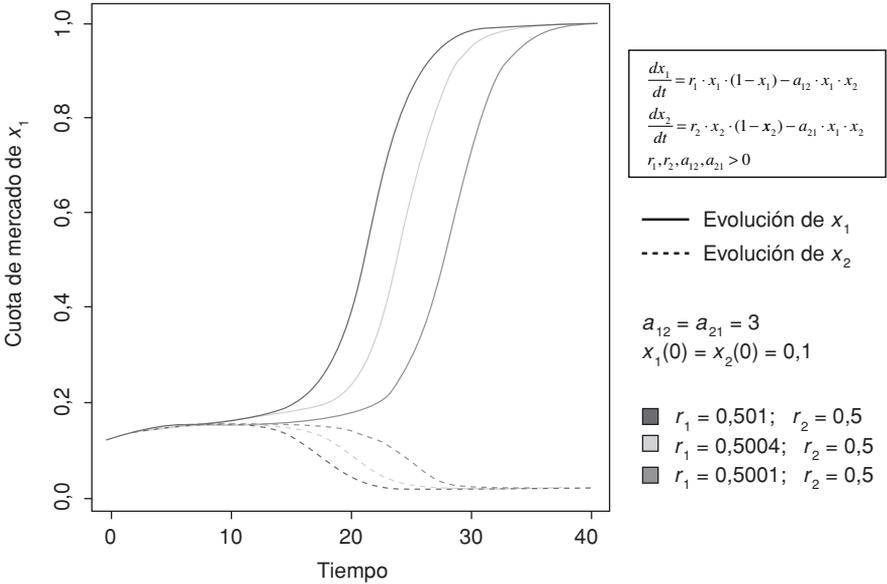
En el caso de competencia entre dos estándares tecnológicos, el modelo queda reducido a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= r_1 \cdot x_1 \cdot (1-x_1) - a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= r_2 \cdot x_2 \cdot (1-x_2) - a_{21} \cdot x_1 \cdot x_2
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

En el capítulo VI ya se analizaron en detalle las características de este modelo, por lo que no se insistirá nuevamente en ello. Sin embargo es preciso mencionar que, como se muestra en la figura 7.4, el modelo efectivamente presenta un comportamiento más adecuado que el Gompertz: la evolución es de tipo sigmoïdal pero con una fase de lanzamiento suave y prolongada, como corresponde a un producto de red. Y dicho comportamiento se mantiene dentro de un rango de valores suficientemente amplio.

FIGURA 7.4

EVOLUCIÓN SIGMOÏDAL DEL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

3. EJEMPLO 1: ALGUNAS MEJORAS AL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA

Volvamos al modelo de Lotka-Volterra en dimensión 2 (ecuación 7.2). En primer lugar estas ecuaciones permiten, en función de los valores de sus parámetros ($r_1 > a_{12}, r_2 > a_{21}$), situaciones de baja competencia en las que los distintos estándares alcanzan una situación de equilibrio competitivo. En estos casos varios estándares pueden mantener, a largo plazo y de forma simultánea, cuotas de mercado relativamente elevadas, lo que no coincide con lo observado en mercados de redes reales.

Éste era precisamente el problema observado en el apartado anterior. Además, en este tipo de escenarios la suma de las cuotas de mercado puede ser mayor que 1.

Otro inconveniente es que bajo determinadas circunstancias ($r_1 > a_{12}$, $r_2 < a_{21}$ o $r_1 < a_{12}$, $r_2 > a_{21}$) no aparece la ya mencionada sensibilidad a las condiciones iniciales, puesto que el estado final de equilibrio no depende en absoluto de las cuotas iniciales de mercado.

Todos estos problemas pueden solucionarse de forma relativamente sencilla mediante una reparametrización del modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1 - x_2) - a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_1 - x_2) - a_{21} \cdot x_1 \cdot x_2 \\ r_1, r_2, a_{12}, a_{21} &> 0\end{aligned}\tag{7.3}$$

Este modelo, que de hecho es equivalente al original imponiendo condiciones de competencia intensa ($r_1 < a_{12}$, $r_2 < a_{21}$), presenta ya un comportamiento del tipo *winner takes all*, la suma de cuotas de mercado es siempre menor o igual a 1 y exhibe sensibilidad a las condiciones iniciales, ya que el estado final de equilibrio viene determinado tanto por los valores de los parámetros (características propias de cada estándar) como por las cuotas de mercado iniciales. Del mismo modo, su evolución es de tipo sigmoïdal.

Es preciso mencionar que ésta es precisamente la modificación introducida por ALTINKEMER *et al.*, (2003) al modelo de Mahajan y Peterson (1978b) para incorporar el efecto del robo de clientes, que se estudió en el capítulo VI.

En adelante se denominará coeficientes EP¹ a los parámetros r_1 y r_2 . Del mismo modo se denominará coeficiente de influencia competitiva del estándar 1 al coeficiente a_{21} ² (que refleja la influencia del estándar 1 sobre el 2) y viceversa.

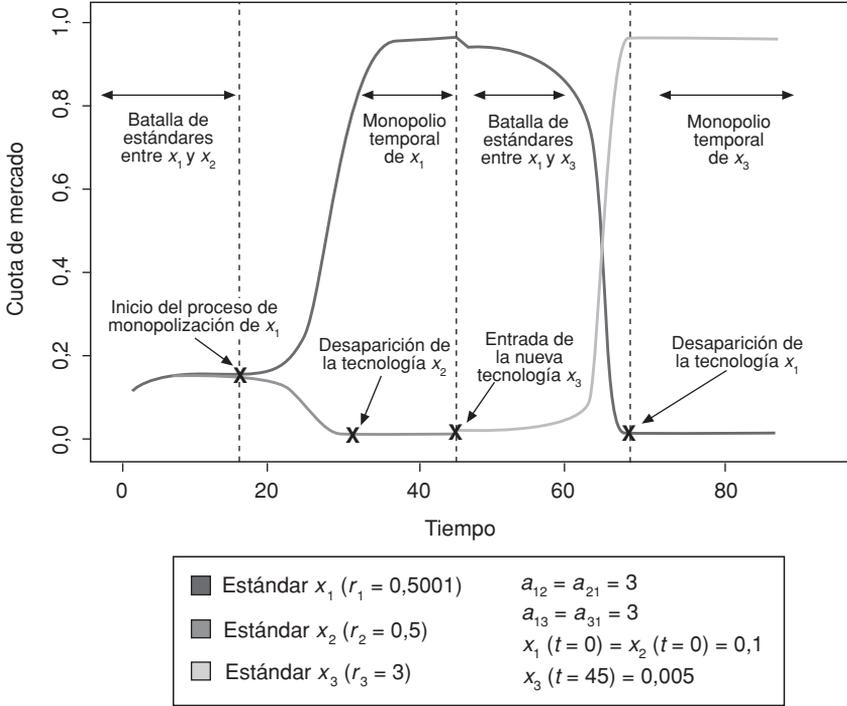
Este modelo, pese a reflejar escenarios de competencia intensa, predice la posible sustitución de tecnologías instaladas. Un estándar tecnológico ya asentado y que por tanto goza de un monopolio temporal, podría llegar a ser relegado a una cuota marginal o incluso eliminado

¹ El término hace referencia al hecho de que este parámetro recoge el efecto de las características propias de la tecnología: precio y las expectativas de éxito generadas por el estándar.

² Se ha optado por conservar la notación original de este tipo de modelos, y éste es el motivo por el que los subíndices aparecen cambiados.

FIGURA 7.5

PROCESO DE SUSTITUCIÓN DE UN ESTÁNDAR INSTALADO SEGÚN LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA MODIFICADAS



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

del mercado por un nuevo estándar superior. En la figura 7.5, que ilustra este concepto, se aprecia el proceso siguiente identificado por cuatro fases sucesivas:

1. Inicialmente se produce una batalla de estándares entre las tecnologías x_1 y x_2 . En este caso la tecnología x_1 resulta vencedora merced a su superioridad (mayor coeficiente r_1).
2. Debido a la naturaleza de este tipo de mercados, el estándar x_2 queda reducido a una presencia marginal en el mercado o incluso eliminado, gozando el estándar x_1 prácticamente de un monopolio temporal.
3. En un momento determinado, aparece un nuevo estándar x_3 , superior a x_1 , de modo que se inicia una nueva batalla de estándares.
4. Pese a la elevada cuota de mercado de la tecnología x_1 , la superioridad de x_3 es tal que logra contrarrestar las condiciones iniciales y

se impone, de modo que el estándar x_1 es sustituido y el estándar x_3 pasa a gozar de un nuevo monopolio temporal.

Es interesante comprobar que para que la sustitución sea posible, es preciso que el coeficiente r_3 sea significativamente mayor que r_1 , lo que coincide con lo indicado en el capítulo II.

Generalizando el modelo al caso n -dimensional (competencia entre n estándares tecnológicos) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= r_i \cdot x_i \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^n x_j \right) - x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ r_i, a_{ij} &> 0 \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (7.4)$$

A partir de este modelo, que llamaremos de Lotka-Volterra modificado, se desarrollarán una serie de mejoras que permitan reflejar de forma más adecuada la naturaleza de los Efectos de Red.

A) Incorporación de los efectos de la congestión

Las ecuaciones de Lotka-Volterra modificadas (ecuación 7.3) incluyen el término $r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1 - x_2)$ en la velocidad de difusión de la tecnología x_1 , y una expresión equivalente aparece en el caso de la tecnología x_2 . Este término supone un crecimiento de tipo logístico de la cuota de mercado de la tecnología, e indica que la velocidad de crecimiento es proporcional a la cuota de mercado en el instante considerado, x_1 , y al mercado potencial que todavía no ha sido satisfecho, $(1 - x_1 - x_2)$. Precisamente el término $r_1 \cdot x_1$ puede ser interpretado como la Ley de Metcalfe, ya que indica que la velocidad de crecimiento de la red es proporcional al número de usuarios ya conectados a la misma, reflejando de este modo el aumento del valor que genera cada usuario adicional.

En este sentido, es posible modificar dicho término planteando otro tipo de crecimiento que cumpla las tres condiciones identificadas en el apartado 2 del capítulo III. Es decir, podemos considerar que la velocidad de crecimiento es proporcional a una función tal que:

- Presente, hasta que aparezcan externalidades de congestión, unos rendimientos marginales positivos y decrecientes.
- Permita, a partir de cierto valor, rendimientos marginales negativos, de modo que se recoja el efecto de las externalidades de congestión.

- Prediga que la interconexión entre redes de diferente tamaño añade más valor a la más pequeña.

Una de las funciones más sencillas que pueden formularse cumpliendo estas tres condiciones, es un polinomio de segundo grado, del tipo $x_1 - c_1 \cdot x_1^2$.

Sustituyendo en el sistema de Lotka-Volterra modificado (ecuación 7.3) esta expresión, obtendríamos un sistema de ecuaciones como el que se indica a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= r_1 \cdot (x_1 - c_1 \cdot x_1^2) \cdot (1 - x_1 - x_2) - a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= r_2 \cdot (x_2 - c_2 \cdot x_2^2) \cdot (1 - x_1 - x_2) - a_{21} \cdot x_1 \cdot x_2 \\ r_1, r_2, c_1, c_2, a_{12}, a_{21} &> 0\end{aligned}\quad (7.5)$$

La generalización de este modelo al caso n-dimensional (competencia entre n estándares tecnológicos) es relativamente simple, quedando expresada del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= r_i \cdot (x_i - c_i \cdot x_i^2) \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^n x_j\right) - x_i \cdot \sum_{j \neq i} a_{ij} \cdot x_j \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ r_i, c_i, a_{ij} &> 0 \quad \forall i, j\end{aligned}\quad (7.6)$$

Veamos a continuación si este modelo verifica las tres condiciones básicas: evolución temporal de tipo sigmoideal, tendencia a la adopción de un único estándar³, y sensibilidad a las condiciones iniciales. Para ello se estudiará el modelo en el caso bidimensional (competencia entre dos estándares tecnológicos).

B) Evolución sigmoideal

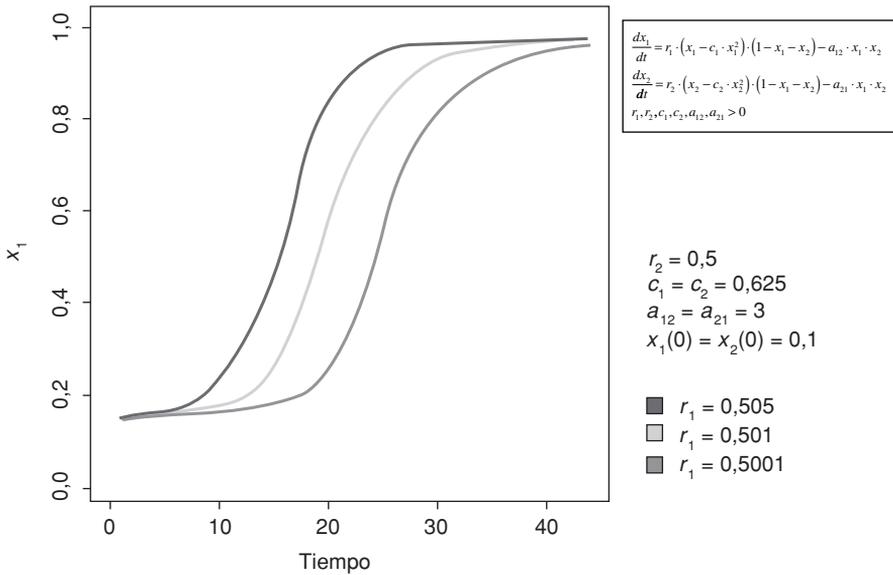
La figura 7.6 muestra los resultados obtenidos tras resolver el modelo (ecuación 7.5) para diferentes valores de los parámetros.

En este caso se ha considerado que las externalidades de congestión aparecen cuando la cuota de mercado alcanza el 80 por 100 (de modo

³ Recordemos que estamos estudiando la competencia entre estándares incompatibles y en presencia de fuertes efectos de red. Ésta es la razón por la que a largo plazo la tendencia a la adopción de un único estándar resulta inevitable.

que $c_1 = c_2 = 0.625$). Se observa que efectivamente la evolución del estándar tecnológicamente superior es de tipo sigmoïdal y que el proceso de adopción es más rápido cuanto mayor sea la diferencia respecto al estándar rival.

FIGURA 7.6
EVOLUCIÓN SIGMOÏDAL DE LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA MODIFICADAS INCORPORANDO LA LEY DE METCALFE MODIFICADA



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

Aunque en esta figura se muestran los resultados para unos valores determinados, otras combinaciones de parámetros similares generan resultados parecidos en cuanto a la evolución sigmoïdal de la cuota de mercado, aunque obviamente la velocidad de adopción será diferente. Por ejemplo, si el nivel de competencia disminuye (menores coeficientes a_{ij}) el proceso de monopolización será más lento, permitiendo que ambos estándares coexistan durante un mayor período de tiempo. Es decir, la etapa de lanzamiento hasta que una de las tecnologías alcanza la masa crítica es, en este caso, mayor. Por tanto queda comprobado que la evolución temporal que predice el modelo coincide con la que cabría esperar según lo recogido en la literatura teórica.

C) Tendencia a la adopción de un único estándar

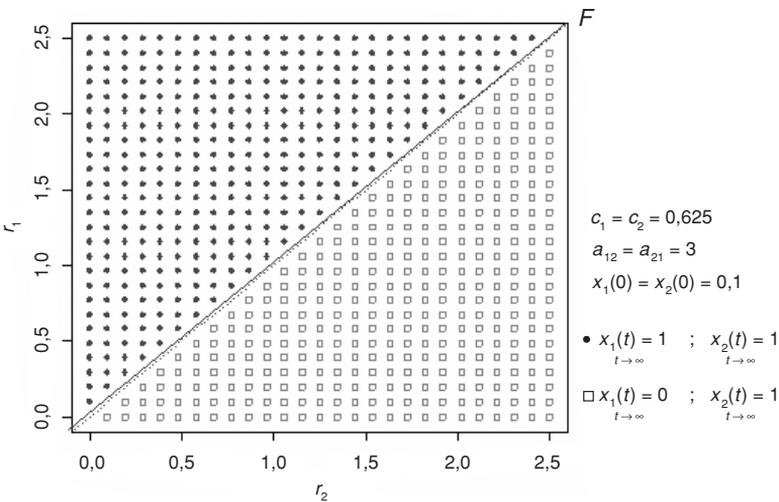
El modelo ha de exhibir a largo plazo un comportamiento del tipo *winner takes all*. Por tanto, cualquier diferencia en los valores de los parámetros debe dar lugar, tras un tiempo suficientemente largo, a la adopción de un único estándar.

Para verificar que el modelo muestra este comportamiento, se ha programado un algoritmo que resuelve el sistema para distintos valores de los coeficientes r_i , calculándose la cuota de mercado de cada uno de los estándares tras un tiempo suficientemente largo. La figura 7.7 representa el estado final que predice el modelo en función de los coeficientes r_i de cada una de las tecnologías. En los casos en que el estándar x_1 logra eliminar al x_2 se muestra un círculo, dibujando un cuadrado en el caso contrario.

Como puede observarse, cualquier diferencia entre los valores de r_1 y r_2 hace que el estándar con mayor coeficiente elimine al estándar rival. Sólo las combinaciones de parámetros situadas sobre la línea F , que muestra el conjunto de estados en los que ambos estándares tienen parámetros EP idénticos, da lugar a situaciones de equilibrio en las que es posible una coexistencia de ambos a largo plazo.

Aunque la figura 7.7 muestra una comparación entre los parámetros r_i , idénticos resultados se obtienen para los parámetros a_{ij} y para las

FIGURA 7.7
EQUILIBRIO FINAL DEL MODELO
PARA DISTINTOS VALORES DE SUS COEFICIENTES r_i



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

cuotas de mercado iniciales. Por tanto queda probado que el modelo efectivamente muestra un comportamiento en el que, a largo plazo, se produce la adopción de una única tecnología, tal y como sucede en los mercados en los que aparecen fuertes Efectos de Red. Sólo sería posible una coexistencia en el caso de que los dos estándares sean exactamente iguales en todas sus características, algo que en la práctica es sumamente improbable.

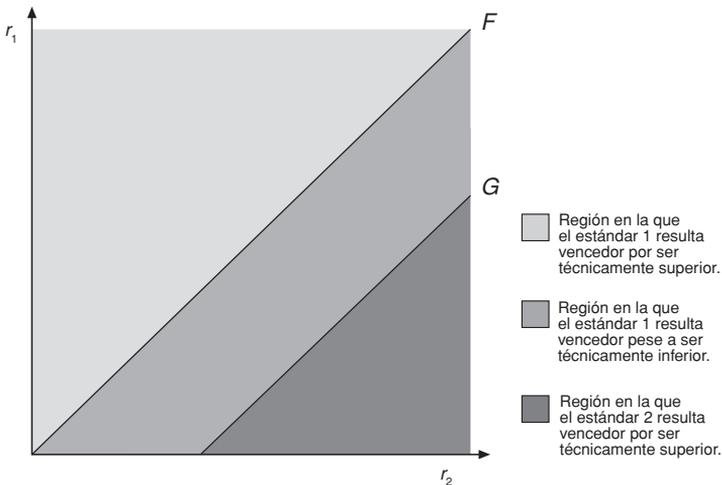
D) Sensibilidad a las condiciones iniciales

Tal y como se estudió en los capítulos II y III, los mercados de redes presentan sensibilidad a las condiciones iniciales, de modo que un estándar tecnológicamente inferior pueda resultar vencedor si parte de una mejor situación inicial. Visto en sentido contrario, esto implica que cuanto más asentada esté una tecnología (mayor cuota de mercado) más difícil será que una nueva tecnología logre sustituirla.

Desde el punto de vista teórico cabría esperar lo siguiente: si el estándar x_1 parte de una cuota de mercado inicial superior, puede resultar vencedor incluso en aquellos casos en los que sea técnicamente inferior a x_2 . Esto es lo que se muestra en la figura 7.8: puesto que el estándar x_1

FIGURA 7.8

EQUILIBRIO FINAL DEL MODELO PARA DISTINTOS VALORES DE LOS COEFICIENTES r_i PARTIENDO DE CONDICIONES INICIALES DIFERENTES: PLANTEAMIENTO TEÓRICO



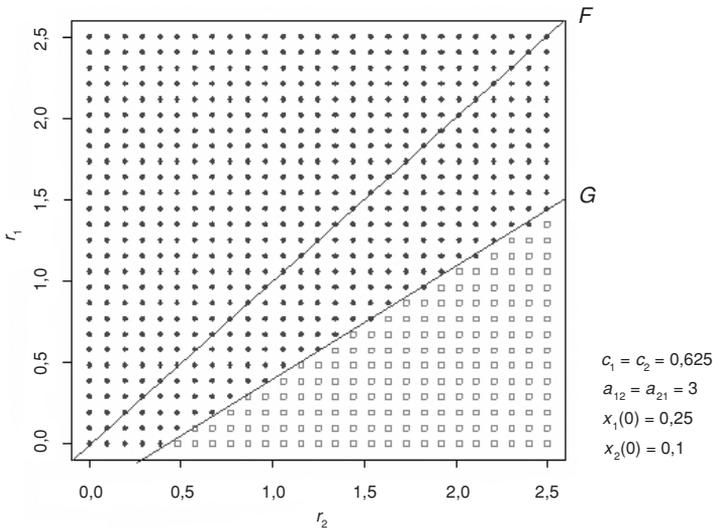
Fuente: Elaboración propia.

cuenta con una cuota de mercado inicial superior a la de x_2 , el primero podrá resultar vencedor en la batalla de estándares incluso en situaciones en las que sus parámetros son inferiores. Es decir, podría producirse la adopción de un estándar tecnológicamente inferior. En este sentido, la región entre las rectas F y G corresponde a situaciones en las que, pese a ser el estándar 1 inferior al 2 ($r_1 < r_2$) resulta vencedor merced a una cuota de mercado inicial superior. A medida que se incrementa la diferencia entre las cuotas de mercado iniciales, la recta G se desplazaría hacia abajo, incrementándose la región en la que el estándar 1 resulta vencedor pese a ser inferior al 2.

En la figura 7.9 se muestran los resultados obtenidos con la correspondiente simulación del modelo (ecuación 7.5), verificándose que su comportamiento coincide aproximadamente con lo que cabría esperar desde un punto de vista teórico. Sin embargo es preciso mencionar que aparece un efecto interesante: la recta G no sólo se desplaza hacia abajo, sino que además presenta una menor pendiente que F . Es decir, el modelo predice que cuanto mayor sea el valor de los parámetros r_i , más acusado será el efecto de la cuota de mercado inicial. O expresado de otro modo, en una batalla de estándares, cuanto mejores sean las tecnologías en com-

FIGURA 7.9

EQUILIBRIO FINAL DEL MODELO PARA DISTINTOS VALORES DE LOS COEFICIENTES r_i PARTIENDO DE CONDICIONES INICIALES DIFERENTES: PREDICCIÓN DEL MODELO



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

petencia (mayores valores de los parámetros r_i), más importante resulta la cuota de mercado inicial de cada una de ellas.

Este resultado resulta sumamente interesante y convendría, en futuras investigaciones, evaluar si efectivamente esta predicción del modelo se ajusta a lo que realmente ocurre en mercados de redes. Después veremos que otro posible modelo no presenta exactamente el mismo comportamiento.

E) Efectos de la congestión

Para terminar, veamos cuál es el impacto de la aparición de externalidades de congestión. Esta «modificación» que se ha propuesto a la Ley de Metcalfe recoge dos efectos diferentes:

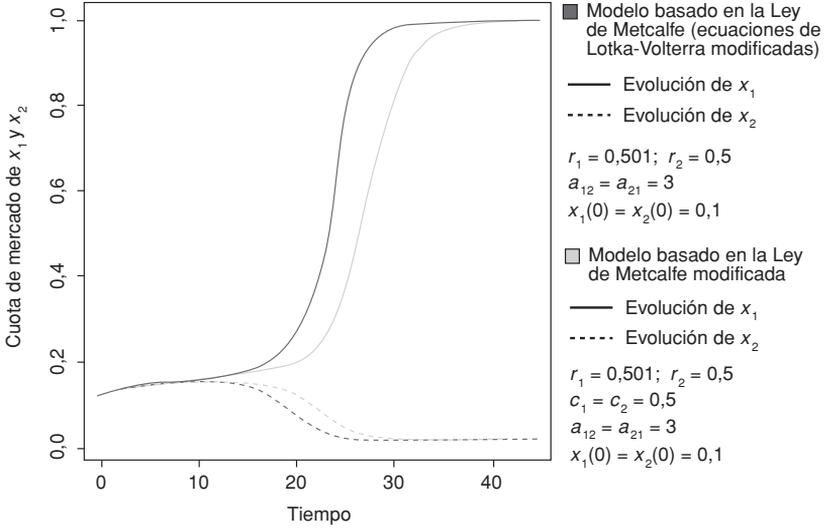
1. El valor aportado por cada usuario adicional no es constante, sino que hasta alcanzar el punto en el que aparecen externalidades de congestión es positivo y decreciente (rendimientos marginales decrecientes). Esto implica que la velocidad de crecimiento del modelo basado en la Ley de Metcalfe (ecuación 7.3) ha de ser mayor que en el modelo basado en la Ley de Metcalfe modificada (ecuación 7.5), aun cuando en este último no se produzcan externalidades de congestión (es decir, cuando $c_1 = c_2 = 0.5$, de modo que las externalidades de congestión no aparezcan hasta alcanzar el 100 por 100 de la cuota de mercado). La figura 7.10 compara la evolución temporal de ambos modelos, apreciándose claramente esta ralentización.

2. A partir del tamaño en que se producen externalidades de congestión, cada usuario adicional aporta un valor negativo. Esto hará que la velocidad de adopción en las etapas finales se ralentice considerablemente, que es cuando sus efectos son mayores. La figura 7.11 compara la evolución del modelo propuesto en tres situaciones diferentes: no se producen externalidades de congestión ($c_1 = c_2 = 0.5$), éstas aparecen al alcanzarse el 65 por 100 de la cuota de mercado ($c_1 = c_2 = 0.77$), y la congestión se produce al alcanzarse el 50 por 100 de la cuota de mercado ($c_1 = c_2 = 1$). Es preciso destacar dos aspectos de esta figura:

- Tal y como cabría esperar, el punto en el que aparecen las externalidades de congestión tiene una influencia mucho mayor en la evolución del estándar vencedor (x_1) que en la del perdedor (x_2), ya que este último desaparece del mercado antes de que los efectos de la congestión sean apenas apreciables.

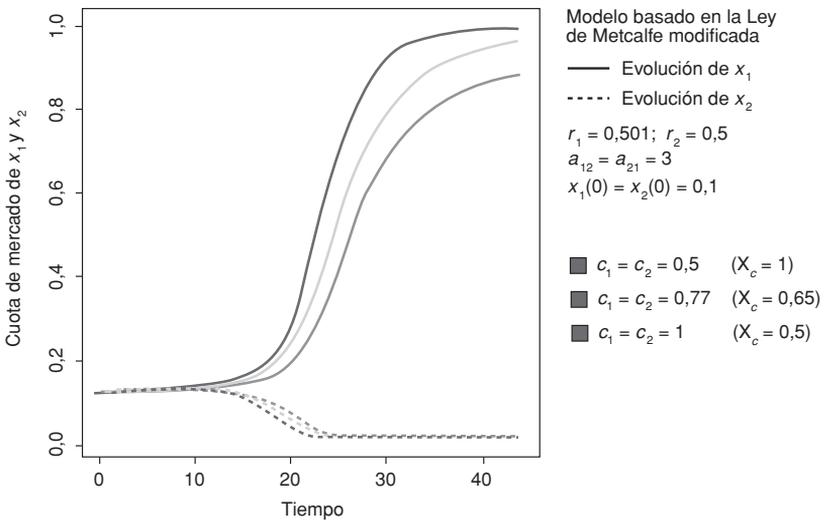
- En lo que respecta al estándar vencedor, el tamaño de la red para el que se inician las externalidades de congestión tiene una gran influencia en el proceso de adopción, especialmente en las etapas finales. Inicial-

FIGURA 7.10
COMPARACIÓN DEL MODELO DE LOTKA-VOLTERRA MODIFICADO Y EL MODELO PROPUESTO



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

FIGURA 7.11
EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL MODELO PARA DIFERENTES PUNTOS DE INICIO DE LAS EXTERNALIDADES DE CONGESTIÓN



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

mente las diferencias son mínimas, pero al aumentar la cuota de mercado los efectos de la congestión empiezan a hacerse patentes, y las diferencias entre los tres escenarios estudiados se incrementa de forma progresiva.

F) Conclusiones del modelo

Se observa que el modelo aparentemente tiene un buen comportamiento, ya que no sólo presenta una evolución sigmoïdal y tendencia a la adopción de un único estándar, sino que además manifiesta sensibilidad a las condiciones iniciales y recoge adecuadamente los efectos de la congestión. Esto implica que la modificación propuesta a la Ley de Metcalfe, podría ser una aproximación razonable para representar la creación de valor en mercados de redes.

4. EJEMPLO 2: EFECTO DE LOS PRODUCTOS COMPLEMENTARIOS

El modelo de Lotka-Volterra modificado (ecuación 7.3) no incorpora en modo alguno el efecto de los productos complementarios, que como ya se mencionó en el capítulo III, es el tercer factor clave en presencia de Efectos de Red. En este sentido es preciso tener en consideración lo siguiente:

1. Los productos complementarios, que en general también estarán sujetos a Efectos de Red, son susceptibles de ser modelizados de forma análoga a los estándares tecnológicos. Sin embargo, en el mercado de complementarios el nivel de competencia ha de ser menor que el que se observa en el mercado de estándares, debido a que no existe una competencia directa tan fuerte. Esto implica que los coeficientes de influencia competitiva de los estándares serán mayores que los coeficientes de influencia competitiva de los complementarios.

2. Existe una influencia cruzada entre cada estándar y su(s) complementario(s), que resulta positiva por los motivos analizados en el capítulo III. Recordemos los modelos de simbiosis estudiados en el capítulo VI.

Tomando en consideración estos elementos, y asumiendo la existencia de un único producto complementario para cada estándar, es posible plantear el siguiente modelo:

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - x_1 - x_2) - a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + s_1 \cdot y_1 \cdot (1 - x_1 - x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2 \cdot x_2 \cdot (1 - x_1 - x_2) - a_{21} \cdot x_1 \cdot x_2 + s_2 \cdot y_2 \cdot (1 - x_1 - x_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= s_1 \cdot y_1 \cdot (1 - y_1 - y_2) - b_{12} \cdot y_1 \cdot y_2 + r_1 \cdot x_1 \cdot (1 - y_1 - y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} &= s_2 \cdot y_2 \cdot (1 - y_1 - y_2) - b_{21} \cdot y_1 \cdot y_2 + r_2 \cdot x_2 \cdot (1 - y_1 - y_2) \\ r_1, r_2, a_{12}, a_{21} &> 0 \\ s_1, s_2, b_{12}, b_{21} &> 0 \\ a_{12}, a_{21} &> b_{12}, b_{21} \end{aligned} \tag{7.7}$$

En este caso x_1 y x_2 representan las cuotas de mercado en tanto por uno de los estándares tecnológicos mientras que y_1 e y_2 son el equivalente para los productos complementarios correspondientes. Los parámetros r_i y s_i son los coeficientes EP de cada estándar y cada producto complementario respectivamente. Los parámetros a_{ij} y b_{ij} son los coeficientes de influencia competitiva entre estándares y entre productos complementarios respectivamente. La interacción cruzada entre cada estándar y su producto complementario queda recogida en los términos cruzados que aparecen en la última parte de cada ecuación.

Este modelo ya recoge el efecto de las características internas (precio y expectativas de éxito) y externas (mercado de complementarios) a través de sus diferentes parámetros. La generalización es relativamente sencilla, de modo que considerando n estándares tecnológicos, cada uno de ellos con m_i productos complementarios, el sistema de ecuaciones queda expresado del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= r_i \cdot x_i \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k\right) - x_i \cdot \sum_{k \neq i} a_{ik} \cdot x_k + \sum_{k=1}^{m_i} s_{ik} \cdot y_{ik} \cdot \left(1 - \sum_{l=1}^n x_l\right) \\ \frac{dy_{ij}}{dt} &= s_{ij} \cdot y_{ij} \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} y_{kl}\right) - y_{ij} \cdot \sum_{k \neq i} \sum_{l=1}^{m_k} b_{ijkl} y_{kl} - y_{ij} \cdot \sum_{l \neq j} b_{ijil} \cdot y_{il} + r_i \cdot x_i \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{m_k} y_{kl}\right) \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ j &= 1, 2, \dots, m_i \\ r_i, s_{ij}, a_{ij} &> 0 \quad \forall i, j \\ b_{ijkl} &> 0 \quad \forall i \neq k \\ a_{ij} &> b_{ijkl} \quad \forall i, j, k, l \end{aligned} \tag{7.8}$$

Obsérvese que el modelo permite cooperación entre productos complementarios de un mismo estándar, ya que los coeficientes del tipo b_{ijik} pueden ser negativos.

Merece la pena desarrollar un estudio algo más detallado del que se ha realizado en apartados anteriores, puesto que la complejidad intro-

ducida por esta modificación es significativamente mayor. De esta manera a continuación, y a modo de síntesis, se han enumerado las características más relevantes que se trataron en los capítulos II y III, vinculando las mismas con diferentes condiciones que el modelo habría de cumplir. En cada caso, y empleando diferentes algoritmos de simulación numérica, se estudiará en qué medida el modelo satisface dichas condiciones. Nos centraremos en el caso más simple posible: dos estándares y dos productos complementarios.

A) Característica 1

La evolución temporal del estándar tecnológico vencedor es de tipo sigmoïdal, y cuanto mayor sea la diferencia entre los estándares rivales, más rápido será el crecimiento.

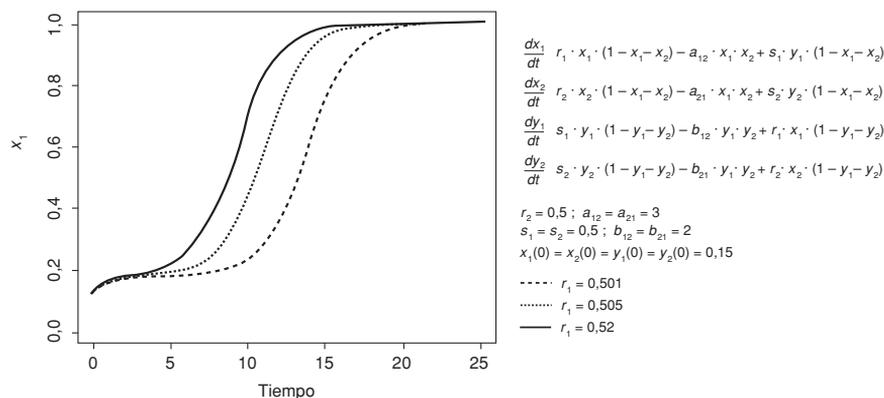
- **Condición 1a:** La cuota de mercado del estándar vencedor evolucionará según un proceso de tres etapas: crecimiento inicial lento seguido de un crecimiento acelerado y posterior deceleración hasta alcanzar un valor próximo a la unidad.

- **Condición 1b:** *Ceteris paribus*, a mayor diferencia entre los coeficientes EP, menor tiempo será necesario para que las cuotas de mercado alcancen los valores de equilibrio 1 y 0.

Asignando diferentes valores a los parámetros con las restricciones indicadas, se comprueba fácilmente que ambas condiciones son verificadas por el modelo. En este sentido la figura 7.12 muestra la evolución

FIGURA 7.12

EVOLUCIÓN TEMPORAL DE UN ESTÁNDAR SUJETO A EFECTOS DE RED (CONDICIONES 1a Y 1b)



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

temporal del estándar x_1 para distintos valores de los coeficientes EP, y como puede observarse, a mayor diferencia entre los coeficientes EP de los estándares x_1 y x_2 más rápido es el proceso de adopción.

B) Característica 2

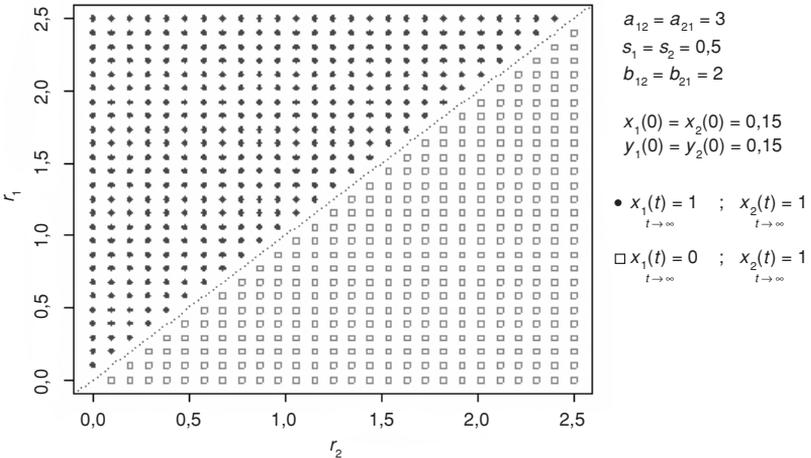
El mercado exhibe a largo plazo un comportamiento del tipo *winner takes all*.

• **Condición 2a:** *Ceteris paribus*, cualquier pequeña diferencia en los valores de los coeficientes EP de los estándares hará evolucionar el mercado de forma que el estándar con mayor coeficiente EP alcance una cuota de mercado próxima a la unidad y el otro próxima a cero.

En la figura 7.13 se ha representado el estado final de ambos estándares en función de los coeficientes EP de cada uno de ellos. En los casos en que el estándar x_1 logra eliminar al x_2 se muestra un círculo, dibujando un cuadrado en el caso contrario. Como puede observarse, cualquier diferencia entre los valores de r_1 y r_2 hace que el estándar con mayor coeficiente EP elimine al estándar rival. Sólo las combinaciones de parámetros situadas sobre la línea de puntos, que muestra el conjunto de estados en los que ambos estándares tienen parámetros idénticos, da lugar a situaciones de equilibrio en las que es posible una coexistencia de ambos estándares a largo plazo.

FIGURA 7.13

EQUILIBRIO FINAL DEL MODELO PARA DISTINTOS VALORES DE SUS COEFICIENTES EP (CONDICIÓN 2a)



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

Las condiciones 2b a 2e, que se enumeran a continuación, serán verificadas mediante un procedimiento similar.

- **Condición 2b:** *Ceteris paribus*, cualquier pequeña diferencia en los coeficientes de influencia competitiva de los estándares hará evolucionar el mercado de forma que el estándar con mayor coeficiente de influencia competitiva alcance una cuota de mercado próxima a la unidad y el otro próxima a cero.

- **Condición 2c:** *Ceteris paribus*, cualquier pequeña diferencia en los coeficientes EP de los complementarios hará evolucionar el mercado de forma que el estándar cuyo complementario tenga un mayor coeficiente EP alcance una cuota de mercado próxima a la unidad y el otro próxima a cero.

- **Condición 2d:** *Ceteris paribus*, cualquier pequeña diferencia en los coeficientes de influencia competitiva de los complementarios hará evolucionar el mercado de forma que el estándar cuyo complementario presente un mayor coeficiente de influencia competitiva alcance una cuota de mercado próxima a la unidad y el otro próxima a cero.

- **Condición 2e:** *Ceteris paribus*, cualquier pequeña diferencia en las cuotas de mercado iniciales hará evolucionar el mercado de forma que el estándar con mayor cuota de mercado inicial alcance una cuota de mercado próxima a la unidad y el otro próxima a cero.

Partiendo de unas condiciones idénticas⁴, la figura 7.14 muestra cómo pequeñas diferencias en los valores de los distintos parámetros inician el proceso de realimentación positiva que da lugar a que uno de los estándares en competencia logre hacerse, a largo plazo, con la totalidad del mercado. Por tanto estas condiciones quedan también verificadas, confirmando que el modelo muestra un comportamiento del tipo *winner takes all*.

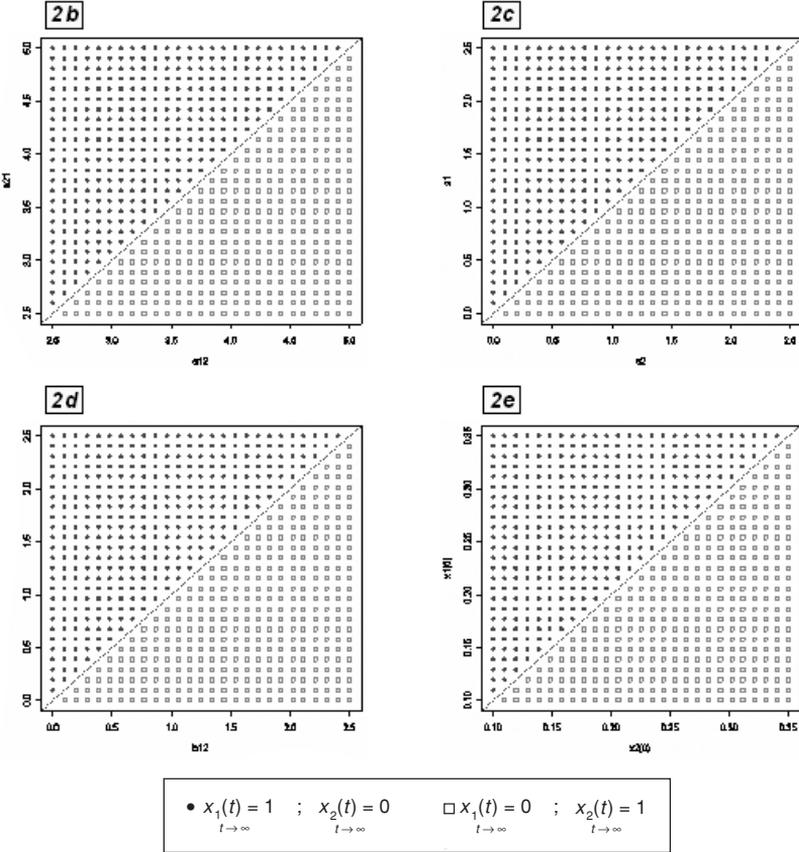
C) Característica 3

Los mercados en los que aparecen Efectos de Red presentan sensibilidad a las condiciones iniciales, de modo que un estándar tecnológicamente inferior puede resultar vencedor si parte de una mejor situación inicial. Esto implica que cuanto más asentada esté una tecnología (mayor cuota de mercado) más difícil será que una nueva tecnología logre ser aceptada.

⁴ Las condiciones de partida en todos los casos son $r_1 = r_2 = 0.5$, $a_{12} = a_{21} = 3$, $s_1 = s_2 = 0.5$, $b_{12} = b_{21} = 2$. A fin de validar cada hipótesis se han variado los parámetros dos a dos, respetando siempre las restricciones impuestas en (7.7) respecto a los valores que han de tomar.

FIGURA 7.14

EQUILIBRIO FINAL DEL MODELO PARA DISTINTOS VALORES DE SUS COEFICIENTES (CONDICIONES 2b A 2e)

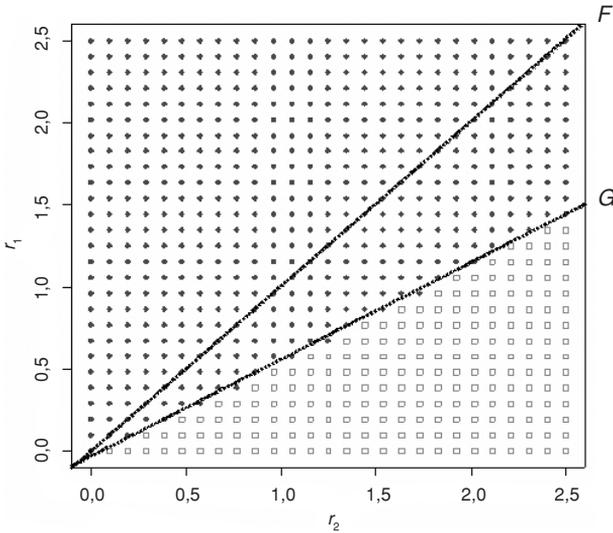


Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

• **Condición 3:** *Ceteris Paribus*, un estándar con coeficiente EP inferior al del estándar rival, puede resultar vencedor si parte de una cuota de mercado inicial superior.

Como puede observarse en la figura 7.15, la región entre las rectas *F* y *G* corresponde a situaciones en las que, pese a ser el estándar 1 inferior al 2 (menores coeficientes EP) resulta vencedor merced a una cuota de mercado inicial superior. Esto indica que efectivamente el modelo presenta sensibilidad a las condiciones iniciales, estando determinado el estado final de equilibrio tanto por las características propias de cada tecnología como por la cuota de mercado inicial.

FIGURA 7.15
EQUILIBRIO FINAL DEL MODELO PARA
DISTINTOS VALORES DE LOS COEFICIENTES EP PARTIENDO
DE CONDICIONES INICIALES DIFERENTES (CONDICIÓN 3)



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

Merece la pena destacar que el comportamiento predicho por este modelo es similar al del modelo estudiado en el apartado anterior (ecuación 7.5), puesto que en ambos casos la pendiente de la recta G es menor a la de la recta F . Es decir, ambos modelos sugieren que en una batalla de estándares, cuanto mejores sean las tecnologías en competencia (mayores valores de los parámetros r_i), más importante resulta la cuota de mercado inicial de cada una de ellas. Sin embargo en la figura 7.9 correspondiente al modelo 7.5 la recta G también se desplazaba hacia abajo, cuando en este caso no lo hace. Se trata de una diferencia interesante debido a sus implicaciones desde un punto de vista económico: el comportamiento es muy diferente en escenarios en los que los estándares rivales presentan coeficientes EP bajos. Evaluar cuál de las 2 predicciones resulta correcta en mercados reales, es sin duda una interesante línea de investigación que queda abierta para futuros trabajos.

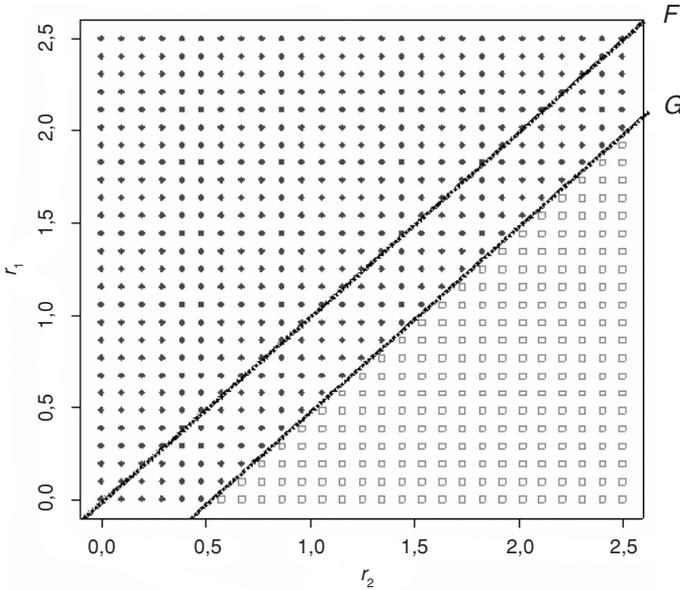
D) Característica 4

Los productos complementarios ejercen una poderosa influencia en la evolución del mercado.

• **Condición 4:** *Ceteris paribus*, un estándar con coeficiente EP inferior al del estándar rival, puede resultar vencedor si su producto complementario es superior (mayor coeficiente EP) al de su competidor.

La figura 7.16 muestra el resultado de la simulación para valores idénticos a los empleados anteriormente, cambiando únicamente el coeficiente EP (haciendo $s_1 = 1$). Como puede comprobarse la condición se verifica puesto que, al igual que ocurría con la condición 3, aparece una región en la que pese a ser el estándar 1 inferior, expulsa del mercado al estándar 2 debido a la mayor fortaleza de su producto complementario.

FIGURA 7.16
EQUILIBRIO FINAL DEL MODELO PARA DISTINTOS VALORES DE LOS COEFICIENTES EP EN EL CASO DE PRODUCTOS COMPLEMENTARIOS DIFERENTES (CONDICIÓN 4a)



Fuente: Elaboración propia (algoritmo programado en «R»).

E) Conclusiones del modelo

Los resultados de las distintas simulaciones confirman, al menos en el caso particular estudiado, que el comportamiento coincide en gran medida con las principales características que la literatura relacionada

con los Efectos de Red identifica, especialmente en lo que se refiere al efecto de los productos complementarios.

Sin embargo sería necesario llevar a cabo un estudio mucho más detallado de sus características (lo que incluiría su estudio para competencia entre más de 2 estándares y con más de 2 complementarios), a fin de garantizar que el modelo presenta un buen comportamiento. Esto excede los objetivos del presente libro, pero la forma de llevar a cabo dicho análisis sería relativamente similar al que se ha desarrollado en este apartado.

5. CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo hemos visto algunos ejemplos de cómo podría formularse un modelo de competencia entre estándares tecnológicos sujetos a Efectos de Red desde la Teoría de Sistemas Dinámicos. Al igual que hemos hecho en capítulos anteriores, destacaremos tres fundamentales.

- Partiendo de un modelo «de base» es posible añadir ciertos elementos que recojan determinados aspectos de los mercados de redes, como por ejemplo la interacción con productos complementarios. Los modelos estudiados en los capítulos V y VI pueden servir de ayuda para expresar en términos matemáticos los efectos que se deseen introducir.

- Los modelos pueden complicarse tanto como se desee. Por ejemplo incluyendo deserciones de usuarios o incorporando retardos que recojan el desfase informativo (las expectativas de éxito se forman en base a la información que los potenciales adoptantes tienen en cada momento).

- Dado que en la práctica el estudio analítico de los modelos puede resultar prácticamente imposible (y tanto más cuanto más complicados sean éstos), estudiar sus propiedades mediante análisis numérico resulta en muchos casos la única vía posible.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES

A lo largo de este libro hemos visto los elementos más relevantes de cara a formular modelos, basados en la Teoría de Sistemas Dinámicos, capaces de representar el funcionamiento de los mercados de redes. En la primera parte se ha estudiado en detalle cuáles son las principales características de los mercados de redes: desde los tipos de Efectos de Red hasta la curva de demanda y evolución temporal de un producto de red. También se han identificado los factores clave para el éxito en este tipo de mercados y las diferentes estrategias posibles. En la segunda parte, y tras analizar los fundamentos de la Teoría de Sistemas Dinámicos, se han estudiado distintos modelos de difusión de tecnologías, compatibles con la difusión de un producto de red. Como extensión natural de este capítulo, se han tratado a continuación diferentes modelos multidimensionales, que permiten representar interacciones de distinto tipo entre estándares tecnológicos (competencia, cooperación, etc.).

Tanto en el caso de los modelos de difusión como, especialmente, en el caso de los modelos de interacción, se ha buscado la identificación de elementos relevantes para la formulación de un modelo propio. Algunos resultados son sumamente interesantes, como por ejemplo el hecho de que, al igual que ocurre en el caso de los mercados de redes, ciertos modelos de infección parasitaria presentan una masa crítica que ha de superarse para que se produzca una infección generalizada de la población. Algo similar ocurre con el modelo de Nicholson, surgido en el ámbito de la Biología Matemática para explicar la evolución de poblaciones de un tipo de moscardo llamado *Lucila Cuprina*: puede aplicarse

a describir la difusión de un producto de red en el que se dan Externalidades de aprendizaje.

1. IMPLICACIONES ACADÉMICAS Y DIRECTIVAS

A) Implicaciones directivas

Algunas de las ideas recogidas en este libro pueden servir de guía a directivos en sus decisiones estratégicas en mercados de redes. En términos generales podemos afirmar que las implicaciones de este libro pueden estructurarse en tres grandes grupos:

1. **Comprensión general de las Externalidades de Red.** El estudio realizado puede permitir a los directivos profundizar en su comprensión de los Efectos de Red, ya que siempre se ha buscado la conexión con la realidad empresarial. En este sentido, se ha tratado de interpretar en términos estratégicos todo el conocimiento teórico desarrollado, especialmente en el campo de la Economía.

2. **Factores clave para el éxito en mercados de redes.** En primer lugar, al análisis teórico ha identificado cuáles son los activos estratégicos en este tipo de mercados. Dicho estudio, sólidamente asentado en trabajos de investigación, puede contribuir a que los directivos alcancen una comprensión más profunda de cuáles son los elementos clave para triunfar en mercados en los que aparecen Efectos de Red.

3. **Estrategias en mercados de redes.** Se han definido cuáles son las posibles estrategias en mercados de redes, ampliando el esquema de Shapiro y Varian (1999a). Estas estrategias se han vinculado con los factores clave y se han clasificado en función de su grado de dificultad y sus beneficios potenciales.

La segunda parte, que resulta mucho más cuantitativa, presenta quizá un interés más limitado de cara a la práctica profesional, ya que está mucho más enfocada a la investigación académica.

B) Implicaciones académicas

En primer lugar, la revisión de la literatura que se ha desarrollado sobre los Efectos de Red, ayuda a comprender en detalle todas las características de este fenómeno. Dicha revisión puede servir de base para estudios posteriores sobre el mismo tema.

En segundo lugar merece la pena mencionar el interés del capítulo dedicado a exponer la Teoría de Sistemas Dinámicos. En esta parte del

trabajo se ha realizado un importante esfuerzo por plantear, de forma clara y rigurosa, los principales elementos de la teoría. Este análisis podría resultar útil para investigadores del campo de la Dirección de Empresas interesados en conocer los fundamentos de los sistemas dinámicos, ya que sintetiza todo lo necesario para iniciar una investigación con este enfoque: desde los conceptos básicos hasta los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Por otra parte, el análisis desarrollado a lo largo de este libro pone de manifiesto que es posible emplear la Teoría de Sistemas Dinámicos como herramienta de modelización en diferentes problemas vinculados a la Dirección de Empresas, y no sólo al estudio de las Externalidades de Red. En este sentido el estudio desarrollado en el capítulo VI, al incluir los elementos más relevantes de los modelos de interacción, puede servir como base para posteriores estudios. Es decir, puesto que se ha analizado detalladamente cómo expresar en términos matemáticos las distintas interacciones posibles, dicho análisis permite el desarrollo de modelos sobre problemas empresariales de diversa índole.

2. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Como ha quedado de manifiesto, existe una gran cantidad de interrogantes abiertos en el estudio de los mercados de redes. Estos interrogantes pueden agruparse en dos grandes bloques, tal y como se indica a continuación.

A) Marco teórico

Tal y como se ha comentado a lo largo de este libro, se ha desarrollado una gran cantidad de investigación en torno a los Efectos de Red, pero la gran mayoría adopta un enfoque económico y apenas se han identificado trabajos con un enfoque estratégico u organizativo. Por este motivo, como futura línea de investigación resultaría sumamente interesante avanzar en la formulación de un marco teórico para las Externalidades de Red desde una perspectiva empresarial.

Por ejemplo, en el capítulo III se plantearon cuáles son los factores clave para triunfar en los mercados de redes: éste podría ser el punto de partida para posteriores trabajos que profundizasen en dichos factores. Del mismo modo, las diferentes estrategias competitivas propuestas y su posterior clasificación también podrían servir de base para el desarrollo de un análisis más exhaustivo, ampliando el número de dimensiones

estratégicas a considerar, y definiendo de este modo un abanico más amplio de alternativas estratégicas.

En general existe una gran cantidad de posibles desarrollos futuros en este sentido, ya que se trata de un campo de gran relevancia en el contexto económico actual y que sin embargo no ha sido suficientemente estudiado hasta el momento.

B) Desarrollo de modelos explicativos / predictivos

Con los diferentes elementos que se han ido tratando a lo largo del texto, es posible tratar de plantear modelos capaces de predecir en cierta medida la evolución de los mercados de redes, o al menos proporcionar pautas sobre su posible comportamiento en función de los diferentes factores relevantes.

Se trata sin duda de una tarea compleja, pero desde nuestro punto de vista, no imposible. Al igual que existen modelos de difusión capaces de predecir de forma bastante acertada la evolución de una nueva tecnología, es posible plantear modelos equivalentes para escenarios de competencia. Con el tiempo iremos viendo si la producción científica en este campo confirma la posibilidad que ahora apuntamos.

BIBLIOGRAFÍA

- ABRAHAMSON, E., y L. ROSENKOPF (1993), «Institutional and Competitive Bandwagons: Using Mathematical Modeling as a Tool to Explore Innovation Diffusion», *Academy of Management Review*, vol. 18, núm. 3, 487-517.
- ALMENDRAL, J. A., L. LÓPEZ, y M. A. F. SANJUÁN (2003), «Information Flow in Generalized Hierarchical Networks», *Working Paper U. Ray Juan Carlos*, (Disponible en http://www.escet.urjc.es/~fisica/investigacion/publications/Papers/almendral_physa03.pdf)
- ALSTAD, D. (2001), *Basic Populus Models of Ecology*. USA: Prentice-Hall Inc.
- ALSTYNE, M. V., y E. BRYNJOLFSSON (1996), «Could the Internet Balkanize Science», *Science*, vol. 274, núm. 5.292, 1479-1480.
- ALTINKEMER, K., W. YUE, y L. YU (2003), «Adoption of Low Earth Orbit Satellite Systems: A Diffusion Model Under Competition», *Information Technology and Management*, vol. 4, núm. 1, 33-54.
- AMIT, R., y C. ZOTT (2001), «Value Creation in e-Business», *Strategic Management Journal*, vol. 22, 493-520.
- ANDERSEN, E. S. (2002), «Railroadization as Schumpeter's Standard Case: An Evolutionary-Ecological Account», *Industry and Innovation*, vol. 9, núm. 1/2, 41-78.
- ANGELELLI, P., I. BUTLER, A. CHAMBOULEYRON, P. DIEGUES, y R. MADANES (2000), «Com.ar. La Revolución de las Tecnologías de la Informática y las Comunicaciones en Argentina», *Instituto de Estudios para la Realidad Argentina (IERAL)*.
- ARACIL SANTOJA, J. (1983), *Introducción a la Dinámica de Sistemas*, Madrid: Alianza Universidad Textos.
- ARNEODO, A., P. COULLET, y C. TRESSER (1980), «Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations». *Physics Letters A*, vol. 79, 259-263.
- ARROYO BARRIGÜETE, J. L. (2005), «Externalidades de Red en la Economía Digital: Desarrollo de un Modelo de Difusión Tecnológica desde la Teoría de Recursos y Capacidades», Investigación Tutelada (DEA) no publicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Complutense de Madrid.

- ARROYO BARRIGÜETE, J. L., y J. I. LÓPEZ SÁNCHEZ (2005a), «Desarrollo y Validación por Simulación Numérica de un Modelo de Competencia Tecnológica en Presencia de Efectos de Red», *Comunicación en el Congreso de Ingeniería de Organización* (CIO 2005). Septiembre 2005.
- (2005b) «Modelos Matemáticos de Difusión Tecnológica», *Comunicación en el Congreso de Ingeniería de Organización* (CIO 2005). Septiembre 2005.
- ARROYO BARRIGÜETE, J. L., J. I. LÓPEZ SÁNCHEZ, y J. CHAPARRO PELÁEZ (2005a), «Externalidades de Red en los Mercados Electrónicos». *Comunicación en el Congreso de Ingeniería de Organización* (CIO 2005). Septiembre 2005.
- ARROYO BARRIGÜETE, J. L., y J. I. LÓPEZ SÁNCHEZ (2005c), «Externalidades de Red en la Economía Digital: una Revisión Teórica», *Economía Industrial* (en prensa).
- ARROYO BARRIGÜETE, J. L., J. I. LÓPEZ SÁNCHEZ y J. M. PÉREZ PRADO (2005b), «Procesos de Sustitución Tecnológica en Mercados de Redes», *Cuadernos de Estudios Empresariales*, vol. 15, 93-106.
- ARROYO BARRIGÜETE, J. L., J. I. LÓPEZ SÁNCHEZ, y C. SÁNCHEZ-SECO FERNÁNDEZ (2005c), «Efectos de Red: Economía y Biología Matemática», *Encuentros Multidisciplinares*, vol. 11, núm. 21, 2-11.
- ARROYO BARRIGÜETE, J. L., J. I. LÓPEZ SÁNCHEZ y F. DEL CERRO DEL CERRO (2005d), «Redes y Efectos de Red: una Breve Introducción a las Externalidades en la Economía Digital». *BIT*. núm. 153, 66-68.
- ARROYO BARRIGÜETE, J. L., y J. I. LÓPEZ SÁNCHEZ (2005d), «Desarrollo de un Modelo de Competencia en Presencia de Efectos de Red a Partir de la Ley de Metcalfe Modificada», *Comunicación oral en el Iberoamerican Academy of Management 4th International Conference*, Diciembre de 2005, Lisboa.
- (2005e), «Modelos de Difusión Tecnológica en Presencia de Efectos de Red». *Comunicación oral en el Iberoamerican Academy of Management 4th International Conference*. Diciembre de 2005, Lisboa.
- (2004), «Externalidades de Red en la Economía Digital». *Comunicación oral presentada en el Congreso ACEDE 2004*, 20 de Septiembre de 2004, Murcia.
- ARROYO BARRIGÜETE, J. L. (2002), «Los Servicios de Comunidad como Estrategia de Fidelización en el Comercio Electrónico», *Revista de Dirección y Organización*, vol. 28, 132-137.
- ARTHUR, B. W. (1996), «Increasing Returns and the New World of Business», *Harvard Business Review*, July-August.
- (1990), «Positive Feedbacks in the Economy», *Scientific American*, vol. 262. 92-99.
- (1989), «Competing Technologies, Increasing Returns and Lock-in by Historical Events», *The Economic Journal*, vol. 99, 116-131.
- BAIN, A. D. (1963), «The Growth of Demand for New Commodities», *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*, vol. 126, núm. 2, 285-299.
- BAKER, G. L., y J. P. GOLLUB (1994), «Chaotic Dynamics. An Introduction». *USA: Cambridge University Press*.
- BALACER, Y., y S. A. LIPPMAN (1984), «Technological Expectations and Adoption of Improved Technology», *Journal of Economic Theory*, vol. 34, núm. 2, 292-318.

- BARNETT, W. P., y G. R. CARROLL (1987), «Competition and Mutualism among Early Telephone Companies», *Administrative Science Quarterly*, vol. 32, núm. 3, 400-421.
- BARNEY, J. B. (1991), «Firm Resources and Sustained Competitive Advantage», *Journal of Management*, vol. 17, núm. 1, 99-120.
- BASS, F. M. (1969), «A New Product Growth Model for Consumer Durables», *Management Science*, vol. 15, núm. 5, 215-227.
- BASU, A., T. MAZUMDAR, y S. P. RAJ (2003), «Indirect Network Externality Effects on Product Attributes», *Marketing Science*, vol. 22, núm. 2, 209-221.
- BAUM, J. A. C., y H. J. KORN (1996), «Competitive Dynamics of Interfirm Rivalry», *Academy of Management Journal*, vol. 39, núm. 2, 255-291.
- BELLO ACEBRÓN, L. (1984), «El Proceso de Difusión de Innovaciones: Consideraciones Críticas Acerca de los Modelos de Primera Compra», *Investigaciones Económicas*, núm. 24, 139-164.
- BERTALANFFY, L. V. (1976), «Teoría General de los Sistemas», Madrid: *Fondo de Cultura Económica*.
- (1972), «The History and Status of General System Theory», *Academy of Management Journal*, vol. 15, núm. 4, 407-426.
- (1957), «Quantitative Laws in Metabolism and Growth», *Quarterly Review in Biology*, vol. 32, 217-231.
- BESEN, M. S., y J. FARRELL (1994), «Choosing How to Compete: Strategies and Tactics in Standardization», *The Journal of Economic Perspectives*, vol. 8, núm. 2, 117-131.
- BETTENCOURT, L. M. A., A. CINTRÓN-ARIAS, D. I. KAISER, y C. CASTILLO-CHAVEZ (2005), «The Power of a Good Idea: Quantitative Modeling of the Spread of Ideas from Epidemiological Models», *Working Paper Econophysic Forum*, (Disponible en www.unifr.ch/econophysics).
- BEWLEY, R., y W. E. GRIFFITHS (2003), «The Penetration of CDs in the Sound Recording Market: Issues in Specification, Model Selection and Forecasting», *International Journal of Forecasting*, vol. 19, núm. 1, 111-121.
- BEWLEY, R., y D. FIEBIG (1988), «Flexible Logistic Growth Model with Applications in Telecommunications», *International Journal of Forecasting*, vol. 4, núm. 2, 177-192.
- BHARGAVA, S. C., y A. MUKHERJEE (1994), «Evolution of Technological Growth in a Model Based on Stochastic Cellular Automata», en LEYDESDORFF, L., P. VAN DEN BESSELAAR (Eds.), «Evolutionary Economics and Chaos Theory. New Directions in Technology Studies», 54-62.
- BIANCHI, C., y E. BIVONA (2002), «Opportunities and Pitfalls Related to e-Commerce Strategies in Small-Medium Firms: A System Dynamic Approach», *System Dynamics Review*, vol. 18, núm. 3, 403-429.
- BIRCH, C. O. D. (1999), «A New Generalized Logistic Sigmoid Growth Equation Compared with the Richards Growth Equation», *Annals of Botany*, vol. 83, núm. 6, 713-723.
- BLACKMAN, A. W. (1974), «The Market Dynamics of Technological Substitution», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 6, 41-63.
- BLANCHARD, P., R. L. DEVANEY, y R. H. GLEN (1999), «Ecuaciones Diferenciales», Mexico: International Thompson Editores, S.A.

- BOEKER, W. (1991), «Organizational Strategy: An Ecological Perspective», *Academy of Management Journal*, vol. 34, núm. 3, 613-635.
- BRANDER, J. A., y M. S. TAYLOR (1998), «The Simple Economics of Easter Island: A Ricardo-Malthus Model of Renewable Resource Use», *The American Economic Review*, vol. 88, núm. 1, 119-138.
- BRAUER, F., y C. CASTILLO-CHÁVEZ (2001), «Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology». New York: Springer-Verlag.
- BRIDGES, E., K. B. ENSOR, y J. A. NORTON (1993), «Forecasting the Number of Competing Products in High-Technology Markets», *International Journal of Forecasting*, vol. 9, núm. 3, 399-405.
- BRYNJOLFSSON, E., e Y. BAKOS (2000), «Bundling and Competition on the Internet», *Marketing Science*, vol. 19, núm. 1, 63-82.
- BRYNJOLFSSON, E., y M. D. SMITH (2000), «Frictionless Commerce? A Comparison of Internet and Conventional Retailers», *Management Science*, vol. 46, núm. 4, 563-585.
- BRYNJOLFSSON, E., e Y. BAKOS (1999), «Bundling Information Goods: Pricing, Profits, and Efficiency», *Management Science*, vol. 45, núm. 12, 1613-1630.
- BRYNJOLFSSON, E., y C. KEMERER (1996), «Network Externalities in Microcomputer Software: An Econometric Analysis of the Spreadsheet Market», *Management Science*, vol. 42, núm. 12, 1627-1647.
- BURDEN, R. L. y FAIRES, J. D. (1998), «Análisis Numérico» Sexta Edición. México: International Thompson Editores.
- CARROLL, G. R. (1984), «Organizational Ecology», *Annual Review of Sociology*, vol. 10, 71-93.
- CASE, T. J. (2000), *An Illustrated Guide to Theoretical Ecology*, New York: Oxford University Press.
- CASSIMAN, B., y S. SIEBER (2002), «El Impacto de Internet Sobre la Estructura de los Mercados», *Working Paper*, e-Business Center PWC & IESE.
- CASTIAUX, A. (2004), «Inter-Organizational Learning Lotka-Volterra Modeling of Different Types of Relationships», *International System Dynamics Conference*, (Disponible en <http://www.systemdynamics.org/conf2004/indexpapers.htm>).
- CAUGHLEY, G., y J. H. LAWTON (1981), «Plant-Hervivore Systems», In R. M. MAY, «Theoretical Ecology», Second Edition, *Blackwell Scientific Publications*, 132-166.
- CHEN, P. (2002), «Understanding Economic Complexity and Coherence: Market Crash, Excess Capacity, and Technological Wavelets», *Shanghai International Symposium on Complexity Science*, (Disponible en <http://pchen.ccer.edu.cn/homepage/Major%20papers%20by%20Chenping/EcoComplexSH802.pdf>).
- CHENG, J. M. S., L. L. Y. KAO, y J. Y. LIN (2004), «An Investigation of the Diffusion of Online Games in Taiwan: An Application of Roger's Diffusion of Innovation Theory», *Journal of the American Academy of Business*, vol. 5, 439-445.
- CHOI, J. P., y M. THUM (1998), «Market Structure and the Timing of Technology Adoption with Network Externalities», *European Economic Review*, vol. 42, núm. 2, 225-244.

- CHOI, J. P. (1996), «Do Converters Facilitate the Transition to a New Incompatible Technology? A Dynamic Analysis of Converters», *International Journal of Industrial Organization*, vol. 14, núm. 6, 825-835.
- (1994), «Irreversible Choice of Uncertain Technologies with Network Externalities», *RAND Journal of Economics*, vol. 25, núm. 3, 382-401.
- CHOW, G. C. (1967), «Technological Change and the Demand for Computers», *American Economic Review*, vol. 57, núm. 5, 1117-1130.
- CHU, K. H. (2000), *New Models for Metal Biosorption in Fixed Bed Columns*, 9.º APCCHE Congress.
- CHURCH, J., y N. GANDAL (1992), «Network Effects, Software Provision, and Standardization», *The Journal of Industrial Economics*, vol. XL, núm. 1, 85-103.
- CLEMENTS, M. T., y H. OHASHI (2004), «Indirect Network Effects and the Product Cycle: Video Games in the U.S., 1994-2002», *Net Institute Working Paper 04-01*, (Disponible en http://www.netinst.org/Clements_Ohashi.pdf).
- COSTELLO, J. S. (1999), «Synchronization of Chaos in a Generalized Lotka-Volterra Attractor», *The Nonlinear Journal*, vol. 1, 11-17.
- CUSUMANU, M. A., Y. MYLONADIS, y R. S. ROSENBLOOM (1992), «Strategic Maneuvering and Mass-Market Dynamics: The Triumph of VHS over Beta», *Business History Review*, vol. 66, 51-94.
- DANAHER, P. J., B. G. S. HARDIE, y W. P. PUTSIS (2001), «Marketing-Mix Variables and the Diffusion of Successive Generations of a Technological Innovation», *Journal of Marketing Research*, vol. 38, núm. 4, 501-514.
- DAVID, P. A. (1993), «Path-Dependence and Predictability in Dynamic Systems with Local Network Externalities: a Paradigm for Historical Economics». In D. FORAY, y C. FREEMAN, «Technology and the Wealth of Nations. The Dynamics of Constructed Advantage», London: *Piinter Publishers*, 208-231.
- (1986), «Understanding the Economics of Qwerty: The Necessity of History», In W. N. PARKER (ed.), «Economic History and the Modern Economist». New York: *Basil Blackwell*, 30-49.
- (1985), «Clio and the Economics of QWERTY», *American Economic Review*, vol. 75, núm. 2, 332-337.
- DAVIS, H. T. (1962), «Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations», New York: *Dover Publications, Inc.*
- DE BIIL, P. W. J., y S. GOYAL (1995), «Technological Change in Markets with Network Externalities», *International Journal of Industrial Organization*, vol. 13, núm. 3, 307-412.
- DE CESARE, L., A. DI LIDDO, y S. RAGNI (2003), «Numerical Solutions to some Optimal Control Problems Arising from Innovation Diffusion», *Computational Economics*, vol. 22, 173-186.
- DE CESARE, L., y A. DI LIDDO (2000), «A Bolza Optimal Control Problem for Innovation Diffusion», *Dynamic Systems and Applications*, vol. 9, 269-280.
- DEVANEY, R. L. (1986), «An Introduction to Chaotic Dynamical Systems», California: *The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.*
- DHEBAR, A., y S. S. OREN (1986), «Dynamic Nonlinear Pricing in Networks with Interdependent Demand», *Operations Research*, vol. 34, núm. 3, 348-394.

- DIJK, M. V., y Ö. NOMALER (2000), «Network Externalities, New Technology Adoption and Industrial Demography: A Simulation Model», *Druid's (Danish Research Unit for Industrial Dynamics) Winter Conference*, January 2000.
- DIMITROVA, Z. I., y N. K. VITANOV (2001), «Adaptation and its impact on the dynamics of a system of three competing populations», *Physica A*, vol. 300, 91-115.
- DIXON, R. (1980), «Hybrid Corn Revisited», *Econometrica*, vol. 48, núm. 6, 1451-1461.
- DUCEY, R. V., y M. R. FRATRIK (1989), «Broadcasting Industry Response to New Technologies», *Journal of Media Economics*, vol. 1, 67-86.
- EASINGWOOD, C., V. MAHAJAN, y E. MULLER (1983), «A Nonuniform Influence Innovation Diffusion Model of New Product Acceptance», *Marketing Science*, vol. 2, núm. 3, 273-296.
- (1981), «A Non Symmetric Responding Logistic Model for Forecasting Technological Substitution», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 20, 199-213.
- ECKMANN, J. P., y D. RUELLE (1985), «Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors», *Reviews of Modern Physics*, vol. 57, núm. 3, 617-656.
- ECONOMIDES, N. (2003), «Competition Policy in Network Industries: An Introduction», In D. JANSEN (ed.), *The New Economy: Just How New Is It*, University of Chicago Press.
- (2001), «The Microsoft Antitrust Case: Rejoinder», *Journal of Industry, Competition and Trade: From Theory to Policy*, vol. 1, núm. 1, 71-79.
- (2000), «Notes on Network Economics and the New Economy», *Lecture Notes*, August 2000. Stern School of Business. (Disponible en <http://www.stern.nyu.edu/networks/exmba/netnotes2000.pdf>).
- ECONOMIDES, N., y F. FLYER (1998), «Equilibrium Coalition Structures in Markets for Network Goods», *Annales d'Economie et de Statistique*, vol. 49/50, 361-380.
- (1997), «Compatibility and Market Structure for Network Goods», *Discussion Paper EC-98-02*, Stern School of Business.
- ECONOMIDES, N. (1996a), «The Economics of Networks», *The International Journal of Industrial Organization*, vol. 14, núm. 6, 673-699.
- (1996b), «Network Externalities, Complementarities, and Invitation to Enter», *European Journal of Political Economy*, vol. 12, núm. 2, 211-233.
- ECONOMIDES, N., y C. HIMMELBERG (1995a), «Critical Mass and Network Evolution in Telecommunications», In G. BROCK (ed.), «Toward a Competitive Telecommunications Industry: Selected Papers from the 1994 Telecommunications Policy Research Conference».
- (1995b), «Critical Mass and Network Size with Application to the US Fax Market», Discussion Paper núm. EC-95-11. Stern School of Business.
- ENCAOUA, D., M. MOREAUX, y A. PERROT (1996), «Compatibility and Competition in Airlines Demand Side Network Effects», *International Journal of Industrial Organization*, vol. 14, núm. 6, 701-726.
- ESSINGTON, T. E., J. F. KITCHELL, y C. J. WALTERS (2001), «The Von Bertalanffy Growth Function, Bioenergetics, and the Consumption rates of Fish»,

- Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, vol. 58, núm.1 1, 2129-2138.
- EVANS, D. S. (2003), «Some Empirical Aspects of Multi-Sided Platform Industries», *Review of Network Economics*, vol. 2, núm. 3, 191-209.
- EXPANSIÓN (19/11/04), «Sun Regalará el Sistema Operativo Solaris en 2005».
- FARRELL, J., y P. KLAMPERER (2004), «Coordination and Lock-In: Competition with Switching Costs and Network Effects», Versión preliminar para capítulo incluido en el *Handbook of Industrial Organization*, vol. 3. (Disponible en <http://elsa.berkeley.edu/users/farrell/ftp/lockin1.pdf>).
- FARRELL, J., y G. SALONER (1992), «Converters, Compatibility, and the Control of Interfaces», *The Journal of Industrial Economics*, vol. XL, núm. 1, 9-35.
- FARRELL, J., y C. SHAPIRO (1988), «Dynamic Competition and Switching Costs», *The RAND Journal of Economics*, vol. 19, núm. 1, 123-137.
- FARRELL, J., y G. SALONER (1986), «Installed Base and Compatibility: Innovation, Product Preannouncements, and Predation», *The American Economic Review*, vol. 76, núm. 5, 940-955.
- (1985), «Standardization, Compatibility, and Innovation», *The Rand Journal of Economics*, vol. 16, núm. 1, 70-83.
- FERNÁNDEZ-ABASCAL, H., M. M. GUIJARRO, J. L. ROJO, y J. A. SANZ (1994), «Cálculo de Probabilidades y Estadística», Barcelona: Editorial Ariel, S. A.
- FERNÁNDEZ DÍAZ, A. (2000), «Dinámica Caótica en Economía», Segunda Edición. Madrid: McGraw-Hill / Interamericana de España, S. A. U.
- (1994), «La Economía de la Complejidad. Economía Dinámica Caótica» Madrid: McGraw-Hill / Interamericana de España, S. A.
- FERNÁNDEZ PÉREZ, C., F. J. VÁZQUEZ HERNÁNDEZ, y J. M. VEGAS MONTANER (2003), «Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos». Madrid: Thompson.
- FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, Z. (1999), «El Estudio de las Organizaciones (La Jungla Dominada)», *Papeles de Economía Española*, núm. 78-79, 56-77.
- FIEDLER, B., y A. SCHEEL (2000), «Spatio-Temporal Dynamics of Reaction-Diffusion Patterns», In M. KIRKILIONIS, S. KRÖMKER, and R. RANNACHER (eds.), *Trends in Nonlinear Analysis*, Germany: Springer-Verlag.
- FILDES, R., y V. KUMAR (2002), «Telecommunications Demand Forecasting. A Review», *International Journal of Forecasting*, vol. 18, núm. 4, 489-522.
- FISK, P. R. (1961), «The Graduation of Income Distribution», *Econometrica*, vol. 29, núm. 2, 171-185.
- FLOYD, A. (1968), «Trend Forecasting. A Methodology for Figures of Merit», In J. BRIGHT (ed.), «Technological Forecasting for Industry and Government: Methods and Applications». Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- FOURT, L. A., y J. W. WOODLOCK (1960), «Early Prediction of Market Success for New Grocery Products», *Journal of Marketing*, vol. 25, 31-38.
- FRANSES, P. H. (1994), «Finding a Gompertz Curve», *Journal of the Operational Research Society*, vol. 45, núm. 1, 109-113.
- FREEMAN, CH., y C. PÉREZ (1988), «Structural Crisis of Adjustment, Business Cycles and Investment Behaviour» In G. DOSI, C. FREEMAN, R. NELSON, G. SILVERBERG, and L. SOETE (eds.), *Technical Change and Economic Theory*, London: Pinter Publishers.

- FUENTEELSAZ, L., J. P. MAICAS, e Y. POLO (2003), «Economía Digital y Estrategia Empresarial: un Análisis desde la Dirección Estratégica», *Revista de Empresa*, núm. 5, 54-69.
- GANDAL, N., M. KENDE, y R. ROB (2000), «The Dynamics of Technological Adoption in Hardware/Software Systems: The Case of Compact Disc Players», *RAND Journal of Economics*, vol. 31, núm. 1, 43-61.
- GANDAL, N. (1994), «Hedonic Prices Index for Spreadsheets and an Empirical Test for Network Externalities», *RAND Journal of Economics*, vol. 25, núm. 1, 160-170.
- GANDOLFO, G. (1997), «Economic Dynamics», Berlin: Springer-Verlag
- GANESH, J., V. KUMAR, y V. SUBRAMANIAM (1997), «Learning Effect in Multinational Diffusion of Consumer Durables: An Exploratory Investigation», *Journal of the Academy of Marketing Science*, vol. 25, núm. 3, 214-228.
- GANESH, J., y V. KUMAR (1996), «Capturing the Cross National Learning Effect: An Analysis of an Industrial Technology Diffusion», *Academy of Marketing Science*, vol. 24, núm. 4, 328-337.
- GARUD, R., y A. KUMARASWAMY (1993), «Changing Competitive Dynamics in Network Industries: An Exploration of Sun Microsystems' Open Systems Strategy», *Strategic Management Journal*, vol. 14, núm. 5, 351-369.
- GATES, B. (1998), *Camino al Futuro*, Segunda Edición. McGraw-Hill.
- GERSTEIN, M. S. (1988), «Encuentro con la tecnología. Estrategias y cambios en la era de la información», México: Addison-Wesley Iberoamericana.
- GILMORE, R. (1981), «Catastrophe Theory for Scientists and Engineers», *Dover Edition* (1993). New York: Dover Publications, Inc.
- GIMENO NOGUÉS, R. (2000), «Análisis Caótico de Series Temporales Financieras de Alta Frecuencia. El Contrato de Futuro sobre el Bono Nocial a 10 Años», Tesis Doctoral no publicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Departamento de Métodos Cuantitativos, ICADE.
- GIRALDO, A., y M. A. SASTRE (2002), «Sistemas Dinámicos Discretos y Caos. Teoría, Ejemplos y Algoritmos», España: Fundación General de la U. Politécnica de Madrid.
- GIVON, M., V. MAHAJAN, y E. MULLER (1995), «Software Piracy: Estimation of Lost Sales and the Impact on Software Diffusion», *Journal of Marketing*, vol. 59, núm. 1, 29-37.
- GOLDENBERG, J., B. LIBAI, y E. MULLER (2004), «The Chilling Effect of Network Externalities on New Product Growth», *Working Paper*, Tel-Aviv University. (Disponible en www.hitechmarkets.net/files/ThresholdPaperApril2004Final.doc).
- GÓMEZ-GARDEÑES, J., P. ECHENIQUE, e Y. MORENO (2005), «Immunization of real Complex Communication Networks», *Working Paper Econophysic Forum*, (Disponible en www.unifr.ch/econophysics).
- GOOLSBEE, A., y P. J. KLENOW (2002), «Evidence on Learning and Network Externalities in the Diffusion of Home Computers», *Journal of Law and Economics*, vol. XLV, núm. 2, 317-343.
- GOOLSBEE, A., y J. ZITTRAIN (1999), «Evaluating the Costs and Benefits of Taxing Internet Commerce», *National Tax Journal*, vol. 52, núm. 3, 413-428.

- GOWRISANKARAN, G., y J. STAVINS (2004), «Network Externalities and Technology Adoption: Lessons from Electronic Payments», *The Rand Journal of Economics*, vol. 35, núm. 2, 260-276.
- GRILICHES, Z. (1960), «Hybrid Corn and the Economics of Innovation», *Science*, vol. 132, núm. 3.422, 275-280.
- (1957), «Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change», *Econometrica*, vol. 25, núm. 4, 501-522.
- GUPTA, A., B. JUKIC, D. O. STAHL, y A. B. WHINSTON (2000), «Extracting Consumer's Private Information for Implementing Incentive-Compatible Internet Traffic Pricing», *Journal of Management Information Systems*, vol. 17, núm. 1, 9-29.
- GUPTA, A., D. C. JAIN, y M. S. SAWHENY (1999a), «Modelling the Evolution of Markets with Indirect Network Externalities: An Application to Digital Television», *Marketing Science*, vol. 18, núm. 3, 396-416.
- GUPTA, A., D. O. STAHL, y A. B. WHINSTON (1999b), «The Economics of Network Management», *Communications of the ACM*, vol. 42, núm. 9, 57-63.
- HABERMAN, R. (1983), *Elementary Applied Partial Differential Equations. With Fourier Series and Boundary Value Problems*, Second Edition. New Jersey: Prentice Hall Inc.
- HANNAN, M. T., y G. R. CARROLL (1992), «Dynamics of Organizational Populations», New York.: Oxford University Press, Inc.
- HANNAN, M. T., y J. FREEMAN (1989), «Organizational Ecology», Cambridge M. A.: Harvard University Press.
- HARVEY, A. C. (1984), «Time Series Forecasting Based on the Logistic Curve», *Journal of Operational Research Society*, vol. 35, núm. 7, 641-646.
- HASSELL, M. P. (1981), «Arthropod Predator-Prey Systems», In R. M. MAY, «Theoretical Ecology», Second Edition, *Blackwell Scientific Publications*, 105-131.
- HEELER, R. M., y T. P. HUSTAD (1980), «Problems in Predicting New Product Growth for Consumer Durables», *Management Science*, vol. 26, núm. 10, 1007-1020.
- HELLOFS, L. L., y R. JACOBSON (1999), «Market Share and Customers' Perception of Quality: When Can Firms Grow Their Way to Higher Versus Lower Quality?», *Journal of Marketing*, vol. 63, núm. 1, 16-25.
- HENDERSON, A. D. (1999), «Firm Strategy and Age Dependence: A Contingent View of the Liabilities of Newness, Adolescence and Obsolescence», *Administrative Science Quarterly*, vol. 44, núm. 2, 281-314.
- HENDERSON, R. M., y K. B. CLARK (1990), «Architectural Innovation: The Reconfiguration of Existing Product Technologies and the Failure of Established Firms», *Administrative Science Quarterly*, vol. 35, núm. 1, 9-30.
- HERNES, G. (1976), «Diffusion and Growth. The Non Homogeneous Case», *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 78, núm. 3, 427-436.
- HIVNER, W., S. HOPKINS, y W. HOPKINS (2003), «Facilitating, Accelerating and Sustaining the Innovation Diffusion Process: An Epidemic Modelling Approach», *European Journal of Innovation Management*, vol. 6, núm. 2, 80-89.

- HUTCHINSON, E. (1978), «An Introduction to Population Ecology», London: Yale University Press, Ltd.
- ISLAM, T., D. G. FIEBIG, y N. MEADE, (2002), «Modelling Multinational Telecommunications Demand with Limited Data», *International Journal of Forecasting*, vol. 18, núm. 4, 605-624.
- ISLAM, T., y D. G. FIEBIG (2001), «Modelling the Development of Supply-Restricted Telecommunications Markets», *Journal of Forecasting*, vol. 20, núm. 4, 249-264.
- ISLAM, T., y N. MEADE (1996), «Forecasting the Development of the Market for Business Telephones in the UK», *Journal of the Operational Research Society*, vol. 47, núm. 7, 906-918.
- JAIN, D., V. MAHAJAN, y E. MULLER (1991), «Innovation Diffusion in the Presence of Supply Restrictions», *Marketing Science*, vol. 10, núm. 1, 83-90.
- JAYARATNE, J., y C. SHAPIRO (2000), «Simulating Partial Asset Divestitures to “Fix” Mergers», *International Journal of the Economics of Business*, vol. 17, núm. 2, 179-200.
- JEULAND, A. P. (1981), «Parsimonious Models of Diffusion of Innovations. Part A, Derivations and Comparisons», *Working Paper*, Graduate School of Business, University of Chicago.
- KANG, B., C. HAN, y C. YIM, (1996), «An Adaptive Framework for Forecasting Demand and Technological Substitution», *ETRI Journal*, vol. 18, núm. 2, 87-106. (Disponible en <http://etrij.etri.re.kr/pdfdata/18-02-04.pdf>).
- KAPITANIAK, T., y S. R. BISHOP (1999), «The Illustrated Dictionary of Nonlinear Dynamics and Chaos», England: Wiley.
- KARSHENAS, M., y P. STONEMAN (1992), «A Flexible Model of Technological Diffusion Incorporating Economic Factors with an Application to the Spread of Colour Television Ownership in the UK», *Journal of Forecasting*, vol. 11, 577-601.
- KATZ, M. L., y C. SHAPIRO (1994), «System Competition and Network Effects», *The Journal of Economic Perspectives*, vol. 8, núm. 2, 93-115.
- (1992), «Product Introduction with Network Externalities», *The Journal of Industrial Economics*, vol. XL, núm. 1, 55-83.
- (1986), «Technology Adoption in the Presence of Network Externalities», *Journal of Political Economy*, vol. 94, núm. 4, 822-841.
- (1985), «Network Externalities, Competition and Compatibility», *The American Economic Review*, vol. 75, núm. 3, 424-440.
- KAUFFMAN, R. J., J. MCANDREWS, e Y. WANG (2000), «Opening the Black Box of Network Externalities in Network Adoption», *Information Systems Research*, vol. 11, núm. 1, 61-82.
- KAUFFMAN, R. G., y T. A. OLIVA (1994), «Multivariate Catastrophe Model Estimation: Method and Application», *Academy of Management Journal*, vol. 37, núm. 1, 206-221.
- KEDDY, P. A. (2001), «Competition», Second Edition. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- KEILBACH, M., y M. POSCH (1998), «Network Externalities and the Dynamics of Markets», Interim Report of the International Institute for Applied Systems Analysis. ITR-98-089.

- KHALIL, H. K. (2002), «Nonlinear Systems», Third Edition. U. S.: Prentice Hall, Inc.
- KHAN, S., F. ISLAM, y S. M. AHMED (2004), «Is Microsoft a Monopoly: An Empirical Test», *American Business Review*, vol. 22, núm. 2, 130-134.
- KIISKI, S., y M. POHJOLA (2002), «Cross-Country Diffusion of the Internet», *Information Economics and Policy*, vol. 14, 297-310.
- KLEINDORFER, G. B., L. O'NEILL, y R. GANESHAN (1998), «Validation in Simulation: Various Positions in the Philosophy of Science», *Management Science*, vol. 44, núm. 8, 1087-1099.
- KREBS, C. J. (1986), «Ecología», Madrid: Ediciones Pirámide S. A.
- KRISHNAN, T. V., F. M. BASS, y V. KUMAR (2000), «Impact of a Late Entrant on the Diffusion of a New Product/Service», *Journal of Marketing Research*, vol. XXXVII, 269-278.
- KROL, E (1995), «Conéctate al mundo de Internet», México: McGraw Hill.
- KUMAR, V., y T. V. KRISHNAN (2002), «Multinational Diffusion Models: An Alternative Framework», *Marketing Science*, vol. 21, núm. 3, 318-330.
- KUMAR, U., y V. KUMAR (1992a), «Technological Innovation Diffusion: The Proliferation of Substitution Models and Easing the User's Dilemma», *IEEE Transactions on Engineering Management*, vol. 39, núm. 2, 158-168.
- (1992b), «Innovation Diffusion: Some New Technological Substitution Models», *Journal of Mathematical Sociology*, vol. 17, núm. 2, 175-194.
- KUZNETS, S. (1930), «Secular Movements of Products and Prices», New York: Houghton Mifflin.
- LANDA BERCECEBAL, J., y F. VELASCO MORENTE (2004), «Análisis Dinámico del Mercado Actual y Potencial de las Organizaciones», *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 13, núm. 1, 131-140.
- LANGLEY, A. (1999), «Strategies for Theorizing from Process Data», *Academy of Management Review*, vol. 24, núm. 4, 691-710.
- LEE, J., J. LEE, y H. LEE (2003), «Exploration and Exploration in the Presence of Network Externalities», *Management Science*, vol. 49, núm. 4, 553-570.
- LEE, J. C., K. W. LU, y S. C. HORNG (1992), «Technological Forecasting with Nonlinear Models», *Journal of Forecasting*, vol. 11, núm. 3, 195-206
- LEKVALL, P., y C. WAHLBIN (1973), «A Study of some Assumptions Underlying Innovation Diffusion Functions», *Swedish Journal of Economics*, vol. 75, núm. 4, 362-377.
- LEVENBACH, H., y B. E. REUTER (1976), «Forecasting Trending Time Series with Relative Growth Rate Models», *Technometrics*, vol. 18, núm. 3, 261-272.
- LEVY, D. (1994), «Chaos Theory and Strategy: Theory, Application, and Managerial Implications», *Strategic Management Journal*, vol. 15, 167-178.
- LIEBERMAN, M. B., y D. B. MONTGOMERY (1998), «First-Mover (Dis)advantages: Retrospective and Link with the Resource-Based View», *Strategic Management Journal*, vol. 19, núm. 12, 1111-1125.
- LIEBOWITZ, S. J., y S. E. MARGOLIS (1995a), «Are Network Externalities a New Source of Market Failure?», *Research in Laws and Economics*, vol. 17, 1-22.
- (1995b), «Path Dependence, Lock-In and History», *Journal of Laws and Economics*, vol. 11, núm. 1, 205-226.

- (1994), «Network Externality: An Uncommon Tragedy», *Journal of Economic Perspectives*, vol. 8, núm. 2, 133-150.
- (1990), «The Fable of the Keys», *Journal of Laws and Economics*, vol. 33, núm. 1, 1-25.
- LOCH, C. H., y B. A. HUBERMAN (1999), «A Punctuated-Equilibrium Model of Technology Diffusion», *Management Science*, vol. 45, núm. 2, 160-177.
- LOMELÍ, H., y B. RUMBOS, (2003), «Métodos Dinámicos en Economía: Otra búsqueda del tiempo perdido», México, D. F.: Thomson Ed.
- LOMI, A., y E. R. LARSEN (1996), «Interacting Locally and Evolving Globally: A Computational Approach to the Dynamics of Organizational Populations», *Academy of Management Journal*, vol. 39, núm. 4, 1287-1321.
- LÓPEZ, S., J. FRANCE, W. J. J. GERRITS, M. S. DHANOA, D. J. HUMPHRIES, y J. DIJKSTRA (2000), «A Generalized Michaelis-Mentel Equation for the Analysis of Growth», *Journal of Animal Science*, vol. 78, núm. 7, 1816-1828.
- LÓPEZ, L., J. A. ALMENDRAL, y M. A. F. SANJUÁN, (2003), «Complex Networks and the WWW Market», *Physica A*, vol. 324, 754-758.
- LÓPEZ, L., y M. A. F. SANJUÁN (2001), «Defining Strategies to Win in the Internet Market», *Physica A*, vol. 301. 512-534.
- LÓPEZ SÁNCHEZ, J. I.; y J. L. ARROYO BARRIGÜETE (2005a), «Estrategias Competitivas y Capacidades Clave en Mercados Electrónicos Sujetos a Efectos de Red», *Universia Business Review*, núm. 6, 69-79.
- LÓPEZ SÁNCHEZ, J. I., J. M. PÉREZ PRADO, y J. L. ARROYO BARRIGÜETE (2005a), «Guerra entre los Navegadores de Internet», *Expansión* (11/05/05).
- LÓPEZ SÁNCHEZ, J. I., J. L. ARROYO BARRIGÜETE, J. PASAS OGALLAR, y J. M. PÉREZ PRADO (2005b), «Competencia en Mercados Sujetos a Efectos de Red», *Comunicaciones de la Propiedad Industrial y Derecho de la Competencia*, núm. 38, 73-89.
- LÓPEZ SÁNCHEZ, J. I., y J. L. ARROYO BARRIGÜETE (2005b), «Desarrollo de un Modelo de Competencia en Presencia de Efectos de Red a partir de la Ley de Metcalfe modificada», *Comunicación oral en el Congreso ACEDE 2005*. Septiembre de 2005, La Laguna.
- (2005c), «Modelos de Difusión Tecnológica en Presencia de Efectos de Red», *Poster en el Congreso ACEDE 2005*. Septiembre de 2005, La Laguna.
- LÓPEZ SÁNCHEZ, J. I., J. L. ARROYO BARRIGÜETE, y J. M. PÉREZ PRADO (2004), «El desafío de Google», *Expansión* (24/11/04).
- LÓPEZ SÁNCHEZ, J. I., y J. M. PÉREZ PRADO (2004), «Efecto Red Y Microsoft», *Expansión* (7/5/04).
- LÓPEZ SÁNCHEZ, J. I., y F. D. SANDULLI (2001), «Líneas de investigación en la administración de negocios en Internet: una aproximación al estado de la cuestión», XI Congreso Nacional de ACEDE.
- LOSSON, J., M. C. MACKAY, y A. LONGTIN (1993), «Solution Multistability in First-Order Nonlinear Differential Delay Equations», *Chaos*, vol. 3, núm. 2, 167-176.
- LOTKA, A. J. (1925), «Elements of Physical Biology», Reprinted as «Elements of Mathematical Biology» (1956). New York: Dover.
- LUENBERGER, D. G. (1979), «Introduction to Dynamic Systems», U. S.: John Wiley & Sons, Inc.

- LUYBEN, W. L. (1996), «Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers», Second Edition. Singapore: McGraw-Hill, Inc.
- MAHAJAN, V., E. MULLER, y F. M. BASS (1993), «New Product Diffusion Models», In J. ELIASHBERG, G. L. LILIEN (eds), *Handbooks in Operational Research & Management Science*.
- (1990a), «New Product Diffusion Models in Marketing: A Review and Directions for Research», *Journal of Marketing*, vol. 54, núm. 1, 1-26.
- MAHAJAN, V., E. MULLER, y R. K. SRIVASTAVA (1990b), «Determination of Adopter Categories by Using Innovation Diffusion Models», *Journal of Marketing Research*, vol. 27, núm. 1, 37-50.
- MAHAJAN, V., y R. A. PETERSON (1985), «Models for Innovation Diffusion», Beverly Hills, CA: Sage Publications Inc.
- MAHAJAN, V., y E. MULLER (1979), «Innovation Diffusion and New Product Growth Models in Marketing», *Journal of Marketing*, vol. 43, núm. 4, 55-68.
- MAHAJAN, V., y R. A. PETERSON (1978a), «Innovation Diffusion in a Dynamic Potential Adopter Population», *Management Science*, vol. 24, núm. 15, 1589-1597.
- (1978b), «Multi-product Growth Models», *Research in Marketing*, vol. 1, 201-231.
- MAÍCAS LÓPEZ, J. P. (2005), «Análisis Estratégico del impacto de los Costes de Cambio y los Efectos de red en el sector de la Telefonía Móvil en Europa», Tesis Doctoral no publicada. Departamento de Economía y Dirección de Empresas, Universidad de Zaragoza.
- MAIENHOFER, D., y T. FINHOLT, (2002), «Finding Optimal Targets for Change Agents: A Computer Simulation of Innovation Diffusion», *Computational and Mathematical Organization Theory*, vol. 8, núm. 4, 259-280.
- MAINER, F. H. (1998), «New Product Diffusion Models of Innovation Management. A System Dynamics Perspective», *System Dynamics Review*, vol. 14, núm. 4, 285-308.
- MALONE, T. W., J. YATES, y R. I. BENJAMIN (1987), «Electronic Markets and Electronics Hierarchies», *Communications of the ACM*, vol. 30, núm. 6, 484-497.
- MANDELBROT, B. (1997), «La Geometría Fractal de la Naturaleza», Barcelona: Tusquets Editores, S. A.
- MANSFIELD, E. (1961), «Technical Change and the Rate of Imitation», *Econometrica*, vol. 29, núm. 4, 741-767.
- MAR-MOLINERO, C. (1980), «Tractors in Spain. A Logistic Analysis», *Journal of The Operational Research Society*, vol. 31, núm. 2, 141-152.
- MARCELLÁN, F., L. CASASÚS, y A. ZARZO (1990), «Ecuaciones Diferenciales. Problemas Lineales y Aplicaciones», Primera Edición. Madrid: McGraw-Hill / Interamericana de España, S. A.
- MARCHETTI, C. (1983), «On the Role of Science in the Post Industrial Society: The Logos – The EmpireBuilders», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 24, 197-206.
- MARTÍN, M. A., M. MORÁN, y M. REYES (1995), «Iniciación al Caos», Madrid. Editorial Síntesis, S. A.

- MARTIN-CARRILLO DOMINGUEZ, A. (2000), «Desarrollo de un Modelo Flexible de Difusión de Innovaciones: Aplicación a los Casos de Nuevas Tecnologías Aeroespaciales y de Internet», Tesis Doctoral no publicada. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Complutense de Madrid.
- MASUDA, N., y N. KONNO (2005), «Multi-State Epidemic Processes on Complex Networks», *Working Paper Econophysics Forum* (Disponible en www.unifr.ch/econophysics).
- MATEOS DEL CABO, R., y E. OLMEDO FERNÁNDEZ (2002), «Implicaciones del Caos Determinista en la Economía y la Gestión Empresarial», *Encuentros Multidisciplinares*, núm. 11.
- MATUTES, C., y A. J. PADILLA (1994), «Shared ATM Networks and Banking Competition», *European Economic Review*, vol. 38, núm. 5, 1113-1138.
- MAY, R. M. (1980), «Nonlinear Phenomena in Ecology and Epidemiology», *Annals of NY Academy Science*, vol. 357, 267-281.
- McCARTHY, C., y C. J. RYAN (1976), «An Econometric Model of Television Ownership». *Economic and Social Review*, vol. 7, 256-177.
- McGAHAN, A., y W. MITCHELL (2002), «How do Firms Change in the Face of Constraints to Change? An Agenda for Research on Strategic Organization», *Working Paper*; (disponible en http://faculty.fuqua.duke.edu/~willm/bio/cv/papers/SO2003_McGahan_Mitchell.pdf).
- McGAHAN, A. (2000), «How Industries Evolve», *Business Strategy Review*, vol. 11, núm. 3, 1-16.
- McGEE, J., y T. A. SAMMUT (2002), «Network Industries in the New Economy», *European Business Journal*, vol. 14, núm. 3, 116-132.
- McNAUGHTON, S. J., y L. L. WOLF (1984), «Ecología General», Barcelona: Ediciones Omega.
- MEADE, N., y T. ISLAM (1998), «Technological Forecasting. Model selection, Model Stability, and Combining Models», *Management Science*, vol. 44, núm. 8, 1115-1130.
- (1995), «Forecasting with Growth Curves: An Empirical Comparison», *International Journal of Forecasting*, vol. 11, núm. 2, 199-215.
- MEADE, N. (1988), «A Modified Logistic Model Applied to Human Populations», *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 151, núm. 3, 491-498.
- MEES, A. (1986), «Chaos in Feedback Systems», 99-110. In *Chaos*, A. V. HOLDEN (editor), New Jersey: Manchester University Press.
- MILLING, P. M. (2002), «Understanding and Managing Innovation Processes», *System Dynamics Review*, vol. 18, núm. 1, 73-86.
- MILLMAN, J., y A. GRABEL (1993), *Microelectrónica*, Sexta Edición. Barcelona: McGraw-Hill. Inc.
- MODIS, T. (1997), «Genetic Re-Engineering of Corporations», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 56, 107-118.
- MOLERO, J. (1990), «Economía e Innovación. Hacia una Teoría Estructural del Cambio Técnico», *Economía Industrial*, Septiembre-Octubre 1990, 39-54.
- MOLYNEUX, y N. P., SHAMROUKH (1996), «Diffusion of Financial Innovations: The Case of Junk Bonds and Note Issuance Facilities», *Journal of Money, Credit, and Banking*, vol. 28, núm. 3, 502-522.

- MORRIS, S. A., y D. PRATT (2003), «Analysis of the Lotka-Volterra Competition equation as a Technological Substitution Model», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 70, núm. 2, 103-133.
- MORRISON, J. (1996), «How to use diffusion models in new product forecasting», *The Journal of Business Forecasting Methods & Systems*, vol. 15, núm. 2, 6-9.
- MOTULSKY, H., y A. CHIRSTOPOULOS (2003), «Fitting Models to Biological Data Using Linear and Nonlinear Regression. A practical Guide to Curve Fitting», *GraphPad Software Inc.* (Disponible en <http://graphpad.com/manuals/prism4/RegressionBook.pdf>).
- MURRAY, J. D. (2002), «Mathematical Biology», *Third Edition*. USA: Springer.
- MURTHY, D. N. P., M. XIE, y R. JIANG (2004), «Weibull Models», John Wiley & Sons, Inc.
- NAVARRO CID, J. (2001), «Las organizaciones como sistemas abiertos alejados del equilibrio», Tesis Doctoral no publicada. Facultad de Psicología, Universidad de Barcelona.
- (2000), «Gestión de las Organizaciones: Gestión del Caos», *Dirección y Organización*, núm. 23, 136-145.
- NELDER, J. A. (1961), «The Fitting of a Generalization of the Logistic Curve», *Biometrics*, vol. 17, núm. 1, 89-110.
- (1962), «Note: An Alternative Form of a Generalized Logistic Equation», *Biometrics*, vol. 18, núm. 4, 614-616.
- NICOLIS, G., e I. PRIGOGINE (1997), «La Estructura de los Complejos», Madrid: Alianza Editorial, S. A.
- NIETO ANTOLÍN, M. (1997), «Análisis del Rendimiento Tecnológico Mediante el Modelo de la Curva S: Fundamentos Teóricos y Metodología Operativa», *Esic Market*, núm. 98, 161-192.
- NORTON, J. A., y F. M. BASS (1987), «A Diffusion Theory Model of Adoption and Substitution for Successive Generations of High-Technology Products», *Management Science*, vol. 33, núm. 9, 1069-1086.
- NOVALES CINCA, A. (1998), *Econometría*, Segunda Edición. Madrid: McGraw Hill.
- NUÑEZ NICKEL, M., y J. MOYANO FUENTES (2002), «Nuevas Medidas de Tamaño en Ecología Poblacional», *Documento de Trabajo 02-16 de la UC3M*, (Disponible en <http://docubib.uc3m.es/WORKINGPAPERS/DB/db021609.pdf>).
- ODLYZKO, M., y B. TILLY (2005), «A refutation of Metcalfe's Law and a better estimate for the value of networks and network interconnections», *Unpublished manuscript*, (Disponible en <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/metcalfe.pdf>).
- ODLYZKO, M. (2000), «The history of communications and its implications for the Internet», *Unpublished manuscript*, (Disponible en <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/recent.html>).
- OLIVA, R., J. D. STERMAN, y M. GIESE (2003), «Limits to growth in the new economy: exploring the “get big fast” strategy in e-Commerce», *System Dynamics Review*, vol. 19, núm. 2, 83-117.
- OLIVA, T. A. (1991), «Information and Profitability Estimates: Modelling the Firm's Decision to Adopt a New Technology», *Management Science*, vol. 37, núm. 5, 607-623.

- OLIVA, T. A., D. L. DAY, e I. C. MACMILLAN (1988), «A Generic Model of Competitive Dynamics», *Academy of Management Review*, vol. 13, núm. 3, 374-389.
- OLIVER, C. (1997), «Sustainable Competitive Advantage: Combining Institutional and Resource-Based View», *Strategic Management Journal*, vol. 18, núm. 9, 697-713.
- OLMEDA, I., y J. PÉREZ (1995), «Non-Linear Dynamics and Chaos in the Spanish Stock Market», *Investigaciones Económicas*, vol. XIX, núm. 2, 217-248.
- OLSEN, L. F., y H. DEGN (1985), «Chaos in Biological Systems», *Quarterly Review of Biophysics*, vol. 18, núm. 2, 165-225.
- OLSHANSKY, S. J., y B. A. CARNES (1997), «Ever Since Gompertz», *Demography*, vol. 34, núm. 1, 1-15.
- OREN, S., y A. DHEBAR (1985), «Optimal Dynamics Pricing for Expanding Networks», *Marketing Science*, vol. 4, núm. 4, 336 - 351.
- OREN, S., S. SMITH, y R. WILSON (1982), «Nonlinear Pricing in Markets with Interdependent Demand», *Marketing Science*, vol. 1, núm. 3, 287-313.
- OREN, S., y S. SMITH (1982), «Nonlinear Pricing and Network Externalities in Telecommunications», *6th International Conference on Computer Communication*.
- OTT, E. (1993), «Chaos in Dynamical Systems», New York: Cambridge University Press.
- PALOHEIMO, J. E., y L. M. DICKIE (1965), «Food and Growth of Fishes. 1. A Growth Curve Derived from Experimental data», *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, vol. 22, 521-542.
- PARDOLESI, R., y A. RENDA (2004), «The European Commission's Case Against Microsoft: Fool Monti Kills Bill?», LE LAB Working Paper AT-08-04.
- PEAK, D., y M. FRAME (1994), «Chaos Under Control. The Art and Science of Complexity», USA: W. H. Freeman and Company.
- PEITGEN, H. O., H. JÜRGENS, y D. SAUPE (1992), «Chaos and Fractals. New Frontiers of Science», New York: Springer-Verlag.
- PERALES DOMINIQUE, N. (1998), «Internet como Entorno Competitivo: Mercados y Productos Virtuales. Un análisis de la cadena de Valor Virtual», *Dirección y Organización*, núm. 20, 24-29.
- PÉREZ PRADO, J. M., y J. PASSÁS OGALLAR (2004), «Efectos de Red y Competencia en Mercados de Nuevas Tecnologías de la Información», *Gaceta Jurídica*, núm. 230, 117-134.
- PETERSON, R. A. (1973), «A Note on Optimal Adopter Category Determination», *Journal of Marketing Research*, vol. 10, núm. 3, 325-329
- PFÄFFENBERGER, B. (1999), «Diccionario de Términos de Computación», Mexico: Prentice Hall.
- PINDYCK, R. S., y D. L. RUBINFELD (2001), «Microeconomics», New York: Prentice Hall.
- PIANKA, E. R. (1982), «Ecología Evolutiva», Barcelona: Ediciones Omega S. A.
- POLO, Y. (1987), «Determinantes Empresariales de la Adopción de Innovaciones: Terminales de Teleproceso en el Sector Bancario Español», *Investigaciones Económicas*, vol. XI, núm. 2, 243-260.
- PORTAENCASA, R. (ed.), (1980), «Análisis Numérico», Sección de publicaciones de la Universidad Politécnica de Madrid. Facultad de Informática.

- PORTER, M. E., y V. E. MILLAR (1986), «Como obtener ventajas competitivas por medio de la Información», *Harvard – Deusto Business Review*, núm. 25. Primer trimestre 3-20.
- PRISTORIUS, C. W. I., y J. M. UTTERBACK (1997), «Multi-mode Interaction among Technologies», *Research Policy*, vol. 26. 67-84.
- PUENTE, E. A. (1993), «Regulación Automática I», Madrid: Sección de publicaciones de la Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.
- PUU, T. (2003), «Attractors, Bifurcations & Chaos. Nonlinear Phenomena in Economics», Second Edition. Berlin: Springer-Verlag.
- RAESIDE, R. (1988), «The Use of Sigmoids in Modelling and Forecasting Human Populations», *Journal of the Royal Statistical Society, Series A*, vol. 151, núm. 3, 499-513.
- RANDLES, F. (1983), «On the Diffusion of Computer Terminals in an Established Engineering Environment», *Management Science*, vol. 29, núm. 4, 465-476.
- REGGIANI, A., y P. NIJKAMP (1994), «Evolutionary Dynamics in Technological Systems: A Multi-Layer Niche Approach», In L. LEYDESDORFF, y P. VAN DEN BESSELAAR (Eds.), «Evolutionary Economics and Chaos Theory. New Directions in Technology Studies», 94-108.
- REGIBEAU, P., ROCKETT, K. E. (1996), «The Timing of Product Introduction and the Credibility of Compatibility Decisions», *International Journal of Industrial Organizations*, vol. 14, núm. 6, 801-823.
- RIGGINS, F. J., C. H. KRIEBEL, y T. MUKHOPADHYAY (1994), «The Growth of Interorganizational Systems in Presence of Network Externalities», *Management Science*, vol. 40, núm. 8, 984-998.
- ROBERTSON, T. S. (1967), «The Process of Innovation and the Diffusion of Innovation», *Journal of Marketing*, vol. 31, 14-19.
- RODRÍGUEZ ARANA, A. (2004), «Dinámica Macroeconómica y la Curva de Phillips bajo Diversos Supuestos sobre el Mecanismo de Ajuste Salarial», *Estudios Económicos*, vol. 19, núm. 2, 181-210.
- ROGERS, E. M. (1962), «Diffusion of Innovations», New York: The Free Press.
- ROHLFS, J. (1974), «A Theory of Interdependent Demand for a Communication Service», *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 5, núm. 1, 16-37.
- RUAN, S. (2004), «Delay Differential Equations in Single Species Dynamics», In E. A. DADS, O. ARINO, and M. HBID, «Delay Differential Equations with Applications», *NATO Advanced Study Institute*, (disponible en www.math.miami.edu/~ruan/publication.html).
- RUEBECK, C., S. STAFFORD, N. TYNAN, W. ALPERT, G. BALL, y B. BUTKEVICH (2003), «Network Externalities and Standardization: A Classroom Demonstration», *Southern Economic Journal*, vol. 69, núm. 4, 1000-1008.
- SALONER, G., y A. SHEPARD (1995), «Adoption of Technologies with Network Externalities: an Empirical Examination of the Adoption of Automated Teller Machines», *RAND Journal of Economics*, vol. 26, núm. 3, 479-501
- SÁNCHEZ, E., J. GONZÁLEZ, y J. GUTIÉRREZ (2003), «Sistemas Dinámicos. Una Introducción a Través de Ejercicios», Segunda Edición. Madrid: Sección de

- publicaciones de la Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.
- SÁNCHEZ GONZÁLEZ, C. (1999), «Métodos Económicos», Barcelona: Ariel Economía.
- SCANDURA, T. A., y E. A. WILLIAMS (2000), «Research Methodology in Management: Current Practices, Trends, and Implications for Future Research», *Academy of Management Journal*, vol. 43, núm. 6, 1248-1264.
- SCHAFFER, W. M., y M. KOT (1986), «Differential Systems in Ecology and Epidemiology», 158-178. In A. V. HOLDEN (ed.), «Chaos», New Jersey: Manchester University Press.
- SCHRAGE, M. (2004), «Innovation Diffusion», *Technology Review*, vol. 107, núm. 10, 18.
- SCHILLING, M. A. (2002), «Technology Success and Failure in Winner-Take-All Markets: the Impact of Learning Orientation, Timing and Network Externalities», *Academy of Management Journal*, vol. 45, núm. 2, 387-398.
- (1998), «Technological Lockout: An Integrative Model of the Economic and Strategic Factors Driving Technology Success and Failure», *Academy of Management Review*, vol. 23, núm. 2, 267-284.
- SEVCIK, P. (2004), «Innovation Diffusion», *Business Communication Review*, vol. 34, núm. 9, 8-11.
- SHAPIRO, C., y H. R. VARIAN (1999a), «El Dominio de la Información. Una Guía Estratégica para la Economía de la Red», Barcelona: Antoni Bosch.
- (1999b), «The Art of Standards Wars», *California Management Review*, vol. 41, núm. 2, 8-32.
- SHARIF, N. M., y N. M. ISLAM (1980), «The Weibull Distribution as a General Model for Forecasting Technological Change», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 18, 247-256.
- SHARIF, N. M., y C. KABIR (1976), «A generalized Model for Forecasting Technological Substitution», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 8, 353-364.
- SHARMA, P., y S. C. BHARGAVA (1994), «A Non-Homogeneous Non-Uniform Influence Model of Innovation Diffusion», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 46, 279-288.
- SHERIDAN, J. E. (1985), «A Catastrophe Model of Employee Withdrawal Leading to Low Job Performance, High Absenteeism, and Job Turnover During the First Year of Employment», *Academy of Management Journal*, vol. 28, núm. 1, 88-109.
- SHERIDAN, J. E., y M. A. ABELSON (1983), «Cusp Catastrophe Model of Employee Turnover», *Academy of Management Journal*, vol. 26, núm. 3, 418-436.
- SHIGESADA, N., y K. KAWASAKI (1997), «Biological Invasions: Theory and Practice», New York: Oxford University Press.
- SHY, O. (1996), «Technology Revolutions in the Presence of Network Externalities», *International Journal of Industrial Organization*, vol. 14, núm. 6, 785-800.
- SIEBER, S. (2002), «Some Things Are New in the New Economy, but it is not Strategy», Working Paper, e-Business Center PWC & IESE.

- SINDE CANTORNA, A. I. (2004), «El Proceso de Difusión Tecnológica: Factores Condicionantes. Un Análisis del Sector Pesquero Español, 1931-1971», Tesis Doctoral. Universidad de Vigo. Departamento de Organización de Empresas y Marketing.
- SIMON, M., y S. M. HOUGHTON (2003), «The Relationship between Overconfidence and the Introduction of Risky Products: Evidence from a Field Study», *Academy of Management Journal*, vol. 46, núm. 2, 139-149.
- SIMON, H., y K. SEBASTIAN (1987), «Diffusion and Advertising: The German Telephone Campaign», *Management Science*, vol. 33, núm. 4, 451-466.
- SINGH, S. K., y G. S. MADDALA (1976), «A Function for Size Distribution of Incomes», *Econometrica*, vol. 44, núm. 5, 963-970.
- SKIADAS, C. (1986), «Innovation Diffusion Models Expressing Asymmetry and/or Positively or Negatively Influencing Forces», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 30, 313-330.
- SMITH, P. (2001), «El Caos. Una Explicación a la Teoría», Primera Edición. Madrid. Cambridge University Press.
- SNOW, C. C., y J. B. THOMAS (1994), «Field Research Methods in Strategic Management: Contributions to Theory Building and Testing», *Journal of Management Studies*, vol. 31, núm. 4, 457-480.
- SOHN, Y. S., H. JOUN, y D. R. CHANG (2002), «A Model of Consumer Information Search and Online Network Externalities», *Journal of Interactive Marketing*, vol. 16, núm. 4, 2-14.
- SPROTT, J. C. (2004), «Competition with Evolution in Ecology and Finance», *Physics Letters A*, vol. 325, 329-333.
- SPROTT, J. C., J. C. WILDENBERG, e Y. AZIZI (2004), «A Simple Spatiotemporal Chaotic Lotka-Volterra Model», *Working Paper*, (Disponible en <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/lvmodel/casez/csf.pdf>).
- SPROTT, J. C., y G. ROWLANDS (2001), «Improved Correlation Dimension Calculation», *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 11, núm. 7, 1865-1880.
- SRINIVASAN, R., G. L. LILIEN, y A. RANGASWAMY (2004), «First In, First Out? The Effects of Network Externalities on Pioneer Survival», *Journal of Marketing*, vol. 68, 41-58.
- STAPLETON, E. (1976), «The Normal Distribution as a Model of Technological Substitution», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 8, 325-334.
- STAUFFER, D., y C. SCHULZE (2005), «Microscopic and Macroscopic Simulation of Competition Between Languages», *Working Paper Econophysic Forum*, (Disponible en www.unifr.ch/econophysics).
- STAVINS, J. (2003), «Network Externalities in the Market for Electronic Check Payments», *New England Economic Review*, 2003 Issue. 19-30. (Disponible en <http://www.bos.frb.org/economic/neer/neer2003/neer03b.pdf>).
- STONEMAN, P. (1983), «The Economic Analysis of Technological Change», New York. Oxford University Press.
- STROGATZ, S. H. (1994), «Nonlinear Dynamics and Chaos. With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering», U. S.: Perseus Books Publishing, L. L. C.

- SUAREZ, F. F. (2005), «Network Effects Revisited: The Role of Strong Ties in Technology Selection», *Academy of Management Journal*, vol. 48, núm. 4, 710-720.
- SUAREZ, F. F., y J. M. UTTERBACK (1995), «Dominant Designs and the Survival of Firms», *Strategic Management Journal*, vol. 16, núm. 6, 415-430.
- SULTAN, F., J. U. FARLEY, y D. R. LEHMANN (1990), «A Meta Analysis of Applications of Diffusion Models», *Journal of Marketing Research*, vol. 27, 70-77.
- SUN, B., J. XIE, y H. CAO (2004), «Product Strategy for Innovators in Markets with Network Effects», *Marketing Science*, vol. 23, núm. 2, 243-254.
- SWART, J. (1990), «A System Dynamics Approach to Predator-Prey Modelling», *System Dynamics Review*, vol. 6, núm. 1, 94-99.
- TANNER, J. C. (1978), «Long-Term Forecasting of vehicle Ownership and Road Traffic», *Journal of the Royal Statistical Society. Serie A*, vol. 141, núm. 1, 14-63.
- TANNY, S. M., y N. A. DERZKO (1988), «Innovators and Imitators in Innovation Diffusion Modelling», *Journal of Forecasting*, vol. 7, núm. 4, 225-234.
- TEECE, D. J. (1980), «The Diffusion of an Administrative Innovation», *Management Science*, vol. 26, núm. 5, 464-470.
- TEHAN, R. (2002), «Internet Statistics: Explanation and Sources», CRS Report for Congress (RL31270).
- TEOTIA, A. P. S., y P. S. RAJU (1986), «Forecasting the Market Penetrating of New Technologies Using a Combination of Economic Cost and Diffusion Models», *Journal of Product Innovation Management*, vol. 3, 225-237.
- THOM, R. (1977), «Stabilité structurelle et morphogénese», París: Inter Editions.
- THOMAS, H. L., A. SHAROV, H. THOMPSON, N. CAHILL, y S. ADANUR (2001), «Bionomic Analysis of Predatory Exclusion of Technologies», *National Textile Center Annual Report I99-A02*, (Disponible en <http://www.ntcresearch.org/pdf-rpts/AnRp01/I99-A02-A1.pdf>).
- THOMPSON, J. M. T., y H. B. STEWART (1986), «Nonlinear Dynamics and Chaos», Great Britain: John Wiley & Sons Ltd.
- TORO, M., y J. ARACIL (1988), «Qualitative Analysis of System Dynamics Ecological Models», *System Dynamics Review*, vol. 4, núm. 1-2, 56-80.
- TUSHMAN M., y D. NADLER (1986), «Organizing for Innovation». *California Management Review*, vol. 28, núm. 3, 74-92.
- URE, J. (2002), «Modelling Critical Mass for E-Commerce: The Case of Hong Kong», *Electronic Commerce Research*, vol. 2, núm. 1-2, 87-111.
- UTTERBACK, J. M. (1996), «Mastering The Dynamics of Innovation», Boston: Harvard Business School Press.
- UTTERBACK, J. M. (2004), «The Dynamics of Innovation», *Educuse Review*, January / February.
- VALOR, J., y M. HESS (2002), «Estrategias y Sostenibilidad de Portales, Proveedores de Acceso a Internet y Empresas de Contenido: Un Análisis Mediante la Cadena de Valor», *Ocassional Paper IESE*, (Disponible en http://wwwapp.iese.edu/research/res_detail.asp?ident=36674&lang=en).
- VALENTE, M. (1999), «Consumer Behaviour and Technological Complexity in «The Evolution of Markets», *Tesis Doctoral. Department of Business Studies*, Aalborg University. (Disponible en <http://www.business.aau.dk/~mv/ThesisHome/Volume I.pdf>).

- VAN HOVE, L. (1999), «Electronic Money and the Network Externalities Theory: Lessons for Real Life», *Netconomic: Economic Research and Electronic Networking*, vol. 1, núm. 2, 137-171.
- VARADARAJAN, P. R., y M. S. YADAV (2002), «Marketing Strategy and the Internet: An Organizing Framework», *Academy of Marketing Science*, vol. 30, núm. 4, 296-312.
- VÍLCHEZ LOBATO, M. L., F. VELASCO MORENTE, y J. J. GARCÍA DEL HOYO (2002), «Bifurcaciones Transcríticas y Ciclos Límite en un Modelo Dinámico de Competición entre dos Especies. Una aplicación a la Pesquería de engraulis encrasicolus de la Región Suratlántica española», *Estudios de Economía Aplicada*, vol. 20, núm. 3, 651-677.
- VOLTERRA, V. (1931), «Leçons sur la Théorie Mathématique de la lutte pour la vie», Paris: Gauthier-Villars.
- WADE, J. (1995), «Dynamics of Organizational Communities and Technological Bandwagons: An Empirical Investigation of Community Evolution in the Microprocessor Market», *Strategic Management Journal. Special Issue*, vol. 16, 111-133.
- WATANABE, C., R. KONDO, y A. NAGAMATSU (2003), «Policy Options P for the Diffusion Orbit of Competitive Innovations – An Application of Lotka-Volterra Equations to Japan's Transition from Analog to Digital TV broadcasting», *Technovation*, vol. 23, núm. 5, 437-445.
- WEISSTEIN, E. W. (1999), «CRC Concise Encyclopedia of Mathematics», USA: CRC Press LLC.
- WEITZEL, T., O. WENDT, y F. V. WESTARP (2002), «Reconsidering Network Effect Theory», Proceedings of the 8th European Conference on Information Systems (ECIS 2002), 484-491.
- WESTLAND, J. C. (1992), «Congestion and Network Externalities in the Short Run Pricing of Information System Services», *Management Science*, vol. 38, núm. 7, 992-1009.
- WIGGINS, S. (2003), «Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos», Second Edition. New York: Springer-Verlag.
- XIE, J., y M. SIRBU (1995), «Price Competition and Compatibility in the Presence of Positive Demand Externalities», *Management Science*, vol. 41, núm. 5, 909-926.
- YANG, Y., y C. B. BARRET (2002), «Nonconcave, Nonmonotonic Network Externalities», *Taipei Economic Inquiry*, vol. 38, núm. 1, 1-22. (Disponible en <http://yaya.it.cycu.edu.tw/papers/nonconcave.pdf>)
- YANG, Y. (1997), «Essays on Network Effects», PhD Dissertation. Department of Economics. Utah State University.
- YIN, X., J. GOUDRIAAN, E. A. LANTINGA, J. VOS, y H. J. SPIERTZ (2003), «A Flexible Sigmoid Function of Determinate Growth», *Annals of Botany*, vol. 91, núm. 3, 261-371.
- YOFFIE, D. M. (1996), «Competing in the Age of Digital Convergence», *California Management Review*, vol. 38, núm. 4, 31-53.
- YOUNG, P. (1993), «Technological Growth Curves. A Competition of Forecasting Models», *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 44, 375-389.

- ZANGWILL, W. I., y P. B. KANTOR (2000), «The Learning Curve: A New Perspective», *International Transactions in Operational Research*, vol. 7, 595-607.
- ZHOU, T., Z. FU, y B. WANG (2005), «Epidemic Dynamics on Complex Networks», *Working Paper Econophysic Forum*, (Disponible en www.unifr.ch/econophysics).
- ZODROW, G. R. (2003), «Network Externalities and Indirect Tax Preferences for Electronic Commerce», *International Tax and Public Finance*, vol. 10, núm. 1, 79-97.

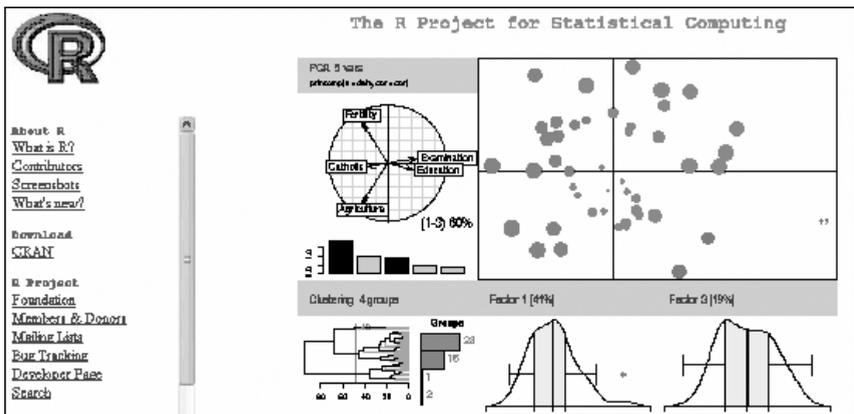
ANEXOS

ANEXO 1

TRABAJANDO CON «R»

«R» es un lenguaje de programación especialmente enfocado a aplicaciones estadísticas. Se trata de una *freeware* que puede obtenerse de forma gratuita en la URL www.r-project.org. Presenta algunas ventajas bastante interesantes respecto a otros lenguajes, como por ejemplo una amplia librería de utilidades estadísticas, funcionalidades gráficas muy versátiles y la posibilidad de vincularlo con otros lenguajes más eficientes computacionalmente como «C» o «Fortran». En este libro, todos los algoritmos programados en los diferentes ejemplos, se han desarrollado en este lenguaje.

FIGURA ANEXO 1. 1
HOME DE R-PROJECT



Fuente: r-project.

A continuación veremos una aplicación práctica de este lenguaje: su utilización para trabajar con algunos de los modelos de difusión tratados en el capítulo V.

1. UTILIZANDO LOS MODELOS DE DIFUSIÓN EN LA PRÁCTICA

Una de las dificultades de trabajar con modelos de difusión es realizar el ajuste con los datos reales. En este sentido puede ser interesante ilustrar cómo se puede llevar a cabo en la práctica este tipo de ajuste, en nuestro caso con «R», aunque podrían utilizarse muchos otros lenguajes de programación o aplicaciones.

Consideremos que queremos estudiar el proceso de difusión de Internet, de modo que trataremos de ajustar los modelos Logístico, Gompertz, Adaptativo Polinómico y Bass para evaluar cuál de ellos es capaz de ajustarse mejor a los datos reales. Internet es un buen ejemplo para ilustrar la difusión de un producto de red por varios motivos:

- Es una tecnología claramente sujeta a Efectos de Red, y probablemente la más paradigmática, ya que se trata de un producto de red puro (valor intrínseco nulo) en el que aparecen Externalidades de Red directas, indirectas y de aprendizaje.

- Los datos sobre el número de Host (que son los que se emplearán por razones técnicas ¹) son conocidos y pueden obtenerse fácilmente a partir de diferentes fuentes.

- La serie es suficientemente larga como para que el ajuste de los modelos sea significativo. Con una serie más corta podría haber problemas al ajustar modelos con un elevado número de parámetros.

Existen distintas fuentes que proporcionan la evolución del número de Host de Internet, aunque existen algunas dificultades:

- No todas las fuentes proporcionan la serie completa de datos desde el año 1969, por lo que es necesario combinar la información de varias de ellas.

- No existe información completa mes a mes de la evolución temporal. Tampoco es posible elaborar una serie anual, ya que los datos correspondientes a años diferentes son medidos en meses distintos. Por este motivo es preciso trabajar con una serie temporal con datos faltantes, lo que introduce una dificultad añadida al estudio econométrico.

¹ Entre otras ventajas, esto permite trabajar con una serie de datos más larga (en las primeras etapas de Internet los datos disponibles hacen referencia casi exclusivamente a este indicador).

Combinando la información de distintas fuentes ², se ha elaborado la tabla 1.1, que como puede observarse es una serie en la que faltan determinados valores.

TABLA ANEXO 1. 1
EVOLUCIÓN DEL NÚMERO DE HOST DE INTERNET

<i>Fecha</i>	<i>Host</i>	<i>Fecha</i>	<i>Host</i>	<i>Fecha</i>	<i>Host</i>	<i>Fecha</i>	<i>Host</i>
dic-69	4	oct-84	1.024	julio-93	1.776.000	julio-99	56.218.000
jun-70	9	oct-85	1.961	enero-94	2.217.000	enero-00	72.398.092
dic-70	13	nov-86	5.089	julio-94	3.212.000	julio-00	93.047.785
abr-71	23	dic-87	28.174	enero-95	4.852.000	enero-01	109.574.429
oct-72	31	oct-88	56.000	julio-95	6.642.000	julio-01	125.888.197
ene-73	35	oct-89	159.000	enero-96	9.472.000	enero-02	147.344.723
jun-74	62	oct-90	313.000	julio-96	12.881.000	julio-02	162.128.493
mar-77	111	enero-91	376.000	enero-97	16.146.000	enero-03	171.638.297
dic-79	188	julio-91	535.000	julio-97	19.540.000	enero-04	233.101.481
ago-81	213	enero-92	727.000	enero-98	29.670.000	julio-04	285.139.107
may-82	235	julio-92	992.000	julio-98	36.739.000	enero-05	317.646.084
ago-83	562	enero-93	1.313.000	enero-99	43.230.000		

Fuente: Elaboración propia.

A continuación habría que ajustar los diferentes modelos mencionados, es decir, calcular el valor de sus parámetros y realizar los correspondientes contrastes. Existen diferentes métodos, pero en este caso y a modo de ejemplo usaremos el de Gauss-Newton (ver por ejemplo SÁNCHEZ GONZÁLEZ, 1999: 183-184; NOVALES CINCA, 1998: 407-409). «R» contiene una librería que incluye el algoritmo, por lo que no es preciso programarlo. Basta introducir los datos adecuadamente y se obtienen los resultados del ajuste. Veamos cómo.

En primer lugar cargaríamos la librería de «R» correspondiente

```
library(nls)
```

A continuación introduciríamos los vectores de datos: mes y número de host

² Por ejemplo Internet System Consortium (<http://www.isc.org/index.pl?/ops/ds/>), Internet Society (http://www.isoc.org/internet/history/2002_0918_Internet_History_and_Growth.ppt) y muchas otras (<http://www.zakon.org/robert/internet/timeline/>, <http://www.nw.com/zone/host-count-history>, etc.)

Host.real=c(4,9,13,23,31,35,62,111,188,213,235,562,1024,1961,5089,28174,56000,159000,313000,376000,535000,727000,992000,1313000,1776000,2217000,3212000,4852000,6642000,9472000,12881000,16146000,19540000,29670000,36739000,43230000,56218000,72398092,93047785,109574429,125888197,147344723,162128493,171638297,233101481,285139107,317646084)

mes=c(0,6,12,16,34,37,54,87,120,140,149,164,178,190,203,216,226,239,250,253,259,265,271,277,283,289,295,301,307,313,319,325,331,337,343,349,355,361,367,373,379,385,391,397,409,415,421)

Vincularíamos seguidamente el número de host con su mes

```
mes = mes + 1
for(i in 1:47)
+ host[mes[i]] = host.real[i]
```

Para terminar transformaríamos el número de host a tanto por uno, dividiendo por el número máximo de host estimado y definiríamos una variable tiempo para realizar el ajuste.

```
host = host/650000000
tiempo = 0:421
```

Hecho esto, el ajuste de los 4 modelos indicados es trivial, y sólo requiere las siguientes instrucciones:

Logística

```
ajuste.logistica = nls(host ~ 1/(1 + exp(-r*tiempo + 18.91)), start = list(r = 0.045), trace = T)
```

Gompertz

```
ajuste.gompertz = nls(host ~ exp(-exp(-r*tiempo + 2.9395)), start = list(r = 0.006), trace = T)
```

Adaptativo

```
ajuste.adaptativo = nls(host ~ 4/650000000 + P*tiempo + a2*tiempo^2 + a3*tiempo^3 + a4*tiempo^4, start = list(S = 0,a2 = 0.000000001, a3 = -0.000000002, a4 = 0.0000000001), trace = T)
```

Bass

```
ajuste.bass = nls(host ~ (1 - exp(-(p + q)*tiempo))/(1 + (q/p)*(exp(-(p + q)*tiempo))), start = list(p = 0.00000008, q = 0.03), trace = T)
```

En ellas definimos cuál es el modelo (que se estudió en cada caso en el apartado correspondiente) con las condiciones iniciales que hayamos elegido. Hecho esto, y empleando la correspondiente instrucción,

obtenemos las características de cada ajuste. En el caso concreto de Bass observaríamos lo siguiente.

summary(ajuste.bass)

*Formula: host ~ (1 - exp(-(p + q) * tiempo))/(1 + (q/p) * (exp(-(p + q) * tiempo)))*

Parameters:

Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)

*p 1.672e-08 3.723e-09 4.49 4.91e-05 ****

*q 3.435e-02 6.040e-04 56.87 < 2e-16 ****

*Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1*

Residual standard error: 0.00802 on 45 degrees of freedom

Vemos que ambos coeficientes, *p* y *q*, resultan altamente significativos (*p*-valor < 0.01), y que sus valores son los que se muestran en la tabla 10.2.

TABLA ANEXO 1.2
CONTRASTE DE HIPÓTESIS PARA EL MODELO BASS

<i>Parámetros</i>	<i>Error std.</i>	<i>t</i>	<i>p-valor</i>
<i>p = 1,7 10⁻⁸</i>	<i>3,723 10⁻⁹</i>	<i>4.49</i>	<i>4.91 10⁻⁵</i>
<i>q = 0,034</i>	<i>6,04 10⁻⁴</i>	<i>56.87</i>	<i><2 10⁻¹⁶</i>

Fuente: Elaboración propia.

Una vez realizado esto con los cuatro modelos considerados, procederíamos a compararlos, es decir, a determinar cuál de ellos ajusta mejor la serie real. Hay varios indicadores que resultan relevantes:

1. **Suma de los residuos al cuadrado.** El residuo se define como la diferencia entre el valor estimado y el real. Por tanto este indicador viene dado por la siguiente expresión: $SS_{reg} = \sum (x_{real} - x_{estimado})^2$.

2. **Coefficiente de determinación (R²).** Este coeficiente indica la bondad del ajuste, y viene dado por la expresión $R^2 = 1 - SS_{reg}/SS_{tot}$. En esta expresión, SS_{tot} es la suma de los residuos al cuadrado cuando se emplea como curva de ajuste el valor medio, es decir: $SS_{tot} = \sum (x_{real} - x_{estimado})^2$.

3. **Criterio de Información de Akaike (AIC).** Como señalan MOTULSKY y CHRISTOPOULOS (2003: 92-93) la comparación de modelos

no lineales no debe hacerse en base al coeficiente R^2 . Los modelos con más parámetros, al ser más flexibles, ajustarán mejor que aquellos que cuenten con menos parámetros, de modo que la comparación de modelos debe considerar este efecto. Para modelos relacionados (*nested models*) se puede recurrir a una tabla ANOVA para efectuar la comparación. Como los modelos que se compararán en este caso no están todos relacionados, es necesario emplear criterios de información, como por ejemplo el criterio de información de Akaike (AIC) (ver MOTULSKY y CHRISTOPOULOS, 2003: 135-136). Este indicador se calcula del siguiente modo: $AIC = N \cdot \ln(SS_{reg}/N) + 2 \cdot K$, donde N es el número de datos reales que se emplean para el ajuste (en este caso 47) y K es el número de parámetros de la ecuación más 1. «R» incluye una instrucción específica para su cálculo.

4. **Probabilidad de que el modelo sea correcto (ER).** Realmente el valor del coeficiente AIC carece de importancia en sí mismo, ya que sólo tiene sentido al comparar modelos. Si A es el modelo más simple y B el más complejo (con mayor número de parámetros) la diferencia, $\Delta AIC = AIC_B - AIC_A$, es lo que determina cuál de los dos tiene una mayor probabilidad de ser correcto: si la diferencia es positiva, el modelo A tiene una mayor probabilidad de ser correcto, y si es negativa ocurre lo contrario, es decir, el modelo con el menor coeficiente AIC es el que tiene mayor probabilidad de ser correcto (MOTULSKY y CHRISTOPOULOS, 2003: 143-148). Esta probabilidad se cuantifica mediante el siguiente indicador (*Evidence Ratio*): $ER = 1/\exp(-0.5 \cdot \Delta AIC)$. Su interpretación es la siguiente: si el valor es de 10, indica que el modelo con menor AIC es unas 10 veces más probable que el otro.

Calculando con «R» el AIC de los cuatro modelos y haciendo los cálculos necesarios para calcular los ratios ER, obtenemos la siguiente tabla:

TABLA ANEXO 1. 3
COMPARACIÓN DE LOS DIFERENTES
MODELOS SEGÚN EL ER

MODELO	Logístico	Gompertz	Adaptativo P.	Bass
Logístico	1	7,53 10 ²⁰	3,61 10 ¹¹	1,42 10 ⁻¹¹
Gompertz	1,33 10 ⁻²¹	1	4,79 10 ⁻¹⁰	1,88 10 ⁻³²
Adaptativo P.	2,77 10 ⁻¹²	2,09 10 ⁹	1	3,93 10 ⁻²³
Bass	7,05 10 ¹⁰	5,31 10 ³¹	2,54 10 ²²	1

Fuente: Elaboración propia.

Como puede comprobarse observando la última fila, correspondiente al modelo de Bass, es éste el que ofrece un mejor ajuste. Elegiríamos por tanto dicho modelo³.

En este apartado solamente se ha pretendido mostrar a grandes rasgos cómo se trabajaría en la práctica con los modelos de difusión usando «R». Desde luego no es el objetivo de este libro entrar en detalles sobre el ajuste por regresión no lineal, y el lector que desee conocer más sobre el tema puede recurrir, por ejemplo, al excelente manual de MOTULSKY y CHRISTOPOULOS (2003).

³ Esta afirmación debe ser muy matizada en tanto que pueden existir problemas de sobreajuste que invaliden el modelo de cara a realizar predicciones. No obstante no entraremos en este tipo de detalles, dejando que el lector interesado consulte cualquiera de los numerosos manuales de regresión que tratan en detalle este tema.

ANEXO 2

ALGUNOS EJEMPLOS

1. MENSAJERÍA INSTANTÁNEA

El sistema de mensajería instantánea Messenger permite comunicarse mediante el envío de mensajes de texto en tiempo real. Existen un gran número de organizaciones que ofrecen este servicio, como por ejemplo MSN, Yahoo, Aol o Google.

La mayoría de estos servicios ofrecen el aviso de presencia, indicando cuándo una persona en la lista de contactos se conecta o en qué estado se encuentra, si está disponible para tener una conversación. También se suele ofrecer la posibilidad de intercambiar archivos, y de dejar mensajes aunque la persona receptora no esté conectada. Recientemente, algunos sistemas de mensajería han comenzado a ofrecer servicios de voz sobre IP y de videoconferencia, que permiten integrar la transmisión audio y video junto con las palabras.

El Messenger es un producto sujeto a Efectos de Red, puesto que su valor se incrementa a medida que aumenta su número de usuarios. Así, se pueden distinguir claramente los tres tipos de externalidades de red, si bien las más importantes son las directas.

- **Externalidades de red directas:** para poder utilizar nuestro Messenger, necesitamos que haya alguien conectado al mismo, y éste ha de ser del mismo tipo, ya que no es posible hablar, por ejemplo, con usuarios de MSN Messenger desde el sistema de Yahoo. Según esto, cuantos más usuarios pertenezcan a una de las redes, mayores serán las posibilidades de hablar con alguno de ellos, y por tanto mayor será el valor

del servicio de mensajería. Para el caso del Messenger, hay que tener en cuenta además que la comunicación se establece generalmente con personas ya conocidas, por ejemplo un grupo de amigos, ya que se necesita haber aceptado previamente que el usuario forme parte de la lista de contactos, a diferencia de lo que ocurre en el chat, donde todos los usuarios pueden intercambiar mensajes en un espacio común. La existencia de «grupos de amigos» hace que surjan pequeñas Externalidades de Red dentro de dichos grupos, ya que a un determinado usuario le aporta valor que se conecten los miembros de su círculo.

- **Externalidades de red indirectas:** este tipo de externalidades aparecen en el Messenger debido a que un mayor número de usuarios hará que el servicio sea mejorado, incluyendo por ejemplo, mayor variedad de emoticonos, mayor rapidez a la hora de enviar un mensaje con un archivo anexo, o un interfaz de la aplicación mejor adaptado al usuario.

- **Externalidades de red de aprendizaje:** A la hora de instalar el producto por primera vez, o de realizar actualizaciones o acciones concretas de la aplicación, será más fácil encontrar ayuda cuanto más extensa sea la base instalada de usuarios que conocen el sistema.

2. SISTEMAS OPERATIVOS

Los sistemas operativos son productos sujetos a efectos de red, ya que además de su valor intrínseco, tienen un valor añadido por el número de usuarios que los utilicen. En este caso, las más relevantes son las externalidades de red indirectas y de aprendizaje.

- **Externalidades de red indirectas:** son muy importantes, ya que la existencia de un gran número de usuarios que hayan elegido un determinado sistema operativo, hará que éste disponga de una mayor cantidad de productos complementarios (software en este caso) adaptados a él. Cuanto mayor sea la cuota de mercado de un sistema, mayor cantidad de software compatible se creará para ese sistema, y es muy posible que mejoren otras características del producto, como por ejemplo el precio o la disponibilidad en el mercado.

- **Externalidades de red de aprendizaje:** también tienen una gran relevancia para los sistemas operativos, ya que la dificultad en el aprendizaje de su funcionamiento puede ser un factor importante en la decisión de compra. Dicho coste será menor si es sencillo encontrar personas que ya conocen el sistema, cursos específicos o manuales de usuario.

A) Windows y Linux

La familia de sistemas operativos de Windows, desarrollada por la empresa Microsoft Corporation, cubre las necesidades de prácticamente todos los perfiles de usuario, ya que existen diferentes versiones, que se adaptan a situaciones específicas. Todos los sistemas operativos de la familia tienen en común el estar basados en un interfaz gráfico de usuario basado en el esquema de ventanas (de ahí su nombre en inglés).

En 1985 Microsoft lanzó Windows, un sistema operativo que ampliaba las prestaciones de MS-DOS e incorporaba por primera vez una interfaz gráfica de usuario. Windows 2.0, que salió a la venta en 1987, mejoraba el rendimiento y ofrecía un nuevo aspecto visual. Tres años más tarde apareció una nueva versión, Windows 3.0, a la que siguieron Windows 3.1 y 3.11. Estas versiones, que ya venían preinstaladas en la mayoría de los equipos, se convirtieron rápidamente en los sistemas operativos más utilizados de todo el mundo. En 1990 Microsoft pasó a ser la empresa líder de programas informáticos y alcanzó unas ventas anuales de más de mil millones de dólares.

Hasta la aparición de Windows 95, era necesario que el sistema operativo se ejecutase sobre MS-DOS, que debía estar previamente instalado. Después, surgieron otras versiones, como Windows 98, 2000, XP y NET. Actualmente, Microsoft está trabajando en dos nuevas versiones de su sistema operativo: Windows Vista y Windows Live.

Otro sistema operativo muy conocido es Linux. Surgió en la década de los 90, como iniciativa de Linus Torvalds, por aquel entonces estudiante de informática en la Universidad de Helsinki. Linux presenta básicamente dos grandes diferencias respecto a otros sistemas operativos. La primera de ellas es que es libre, es decir, que no hay que pagar ningún tipo de licencia por su utilización. La segunda diferencia es que los programas y aplicaciones disponibles para este sistema, vienen acompañados por el código fuente, y se distribuyen de forma gratuita bajo los términos de licencia de la «GNU Public License».

Uno de los principales problemas que surgen a la hora de que un nuevo usuario quiera adquirir Linux es la falta de información sobre cómo instalar y configurar el sistema, ya que casi ningún ordenador incluye este sistema operativo preinstalado. Aunque en las últimas versiones se ha mejorado este aspecto, Linux es más complicado que otros sistemas operativos en cuanto al proceso de instalación y configuración, y esto puede determinar el resultado final de la decisión del usuario, lo cual pone de manifiesto la importancia de las externalidades de red de aprendizaje en este tipo de productos.

3. TECNOLOGÍAS DE VÍDEO

Las tecnologías de vídeo poseen un valor intrínseco, que viene dado por ejemplo por sus características técnicas (mayor duración de grabación de sus cintas, mayor nitidez de imagen o calidad de sonido), por su precio o por su diseño. Dado que se trata de un producto sujeto a efectos de red, el vídeo tiene además un valor de sincronización, debido principalmente a las externalidades de red directas e indirectas.

- **Externalidades de red directas:** aunque es posible utilizar el reproductor de vídeo de forma independiente, sin necesidad de que haya otros usuarios conectados, el valor del producto se incrementa si existe un mayor número de personas que lo adquieran, ya que entonces hay más posibilidades de intercambiar películas con ellos.

- **Externalidades de red indirectas:** tienen una gran relevancia, puesto que el aparato es inútil en sí mismo si no dispone de las correspondientes cintas, CDs o DVDs para grabar o reproducir. Así, cuantos más usuarios dispongan del producto, mayor será por ejemplo la producción de películas pregrabadas adaptadas a ese formato. Si existen dos formatos incompatibles, como es el caso de Betamax y VHS, será determinante a la hora de que un usuario tome su decisión de comprar uno u otro, el hecho de que pueda posteriormente acceder a un mayor número de películas.

- **Externalidades de red de aprendizaje:** este tipo de externalidades afectan en la medida en que al usuario le cueste más o menos aprender el manejo del aparato, si bien todos los estándares tienen un funcionamiento similar y bien documentado, por lo que este factor no es en principio decisivo a la hora de que el usuario se decante por uno u otro tipo de reproductor.

En un principio, el reproductor de vídeo fue un instrumento utilizado únicamente por algunas instituciones educativas o gubernamentales y por el mercado profesional de producción audiovisual, debido principalmente a su alto precio. Sólo cuando se alcanzaron unos precios asequibles, a partir de 1975, se convertiría en un mercado de masas. Las halagüeñas expectativas en torno a este mercado se superaron con creces en tan sólo cinco años. En 1980, era ya el producto de electrónica más fabricado en el mundo, superando incluso a los aparatos de televisión.

A) Betamax vs. VHS

Los estándares Betamax y VHS son tecnologías incompatibles, que tuvieron una dura batalla por hacerse con el mercado. Las externalidades de red jugaron un papel crucial en esta lucha.

El formato de vídeo Betamax fue introducido por Sony en 1975, después de un largo período en el que se anunció su lanzamiento. Al entrar en el mercado antes que el formato VHS, Betamax fue durante un tiempo el único producto de este tipo, y esto le permitió partir de una cuota inicial de mercado mayor cuando un año y medio después, JVC y Matsushita lanzaron el formato VHS. A pesar de ello, Sony no vendió muchos reproductores antes de la llegada del VHS, debido al incipiente estado de este mercado y por los todavía altos precios de los aparatos para muchas familias.

Sin embargo, la llegada del VHS fue explosiva. En tan sólo cuatro meses desde su lanzamiento, ya se habían vendido casi la mitad de reproductores VHS que los que había conseguido vender Sony y sus aliados en más de un año y medio. Un año después, en 1978, ya se vendían un 30 por 100 más de aparatos VHS que Beta en el mercado de EEUU. Sin duda, el apoyo de importantes distribuidores y fabricantes como RCA, Panasonic y Magnavox, con un 25,5 por 100, 14,3 por 100 y 6,8 por 100 de cuota de mercado en 1978, ayudaron a impulsar el formato VHS con mucha fuerza en este mercado (OHASHI, 2003).

Los estándares VHS y Beta partían de unas mismas bases tecnológicas concretadas en el modelo U-Matic de Sony. Si a ello le unimos la gran competencia tecnológica de los equipos que evolucionaban ambos estándares, las diferencias entre ambos formatos nunca fueron significativas. Cualquier mejora de uno de los dos formatos se veía replicada en pocos meses por el estándar competidor.

FIGURA ANEXO 2. 1
REPRODUCTORES DE VÍDEO
DEL FORMATO BETAMAX (izquierda) Y VHS (derecha)



La única característica en la que se mantuvieron diferencias importantes fue la duración de las cintas. Aumentar la duración de las cintas comprometía la calidad de la imagen y Sony optó por no evolucionar esta característica. Sin embargo, Matsushita, ante el interés de RCA en esta característica no dudó en dedicar un importante esfuerzo a este proyecto. Reduciendo la velocidad de giro de la cinta, lograron fabricar y

comercializar vídeos que permitían cuatro horas de grabación a principios de 1977. Hasta mediados de 1979, no logró Sony lanzar un modelo de 5 horas de grabación. (CUSUMANO *et al.*, 1992).

Aunque ambos formatos experimentaron crecimientos muy importantes en los años siguientes, VHS se fue imponiendo como el estándar más demandado por los consumidores, llegando a triplicar en ventas a Betamax en 1983. En 1985 se vendían ya siete reproductores de vídeo VHS por cada uno de Beta y las ventas de Beta apenas crecieron un 3 por 100, para empezar a decaer al año siguiente. Como consecuencia de esta evolución, los distribuidores de películas pregrabadas ajustaron la mayor parte de su producción al formato VHS. A finales de los años 80, VHS alcanzó el 95 por 100 de la cuota de mercado.

En 1988 Sony admitió su derrota y anunció la producción de una línea de grabadoras en VHS. VHS tenía el 95 por 100 del mercado, y se convirtió en el estándar durante los siguientes veinte años.

4. EL FAX

El primer fax comercial apareció en 1863, y a comienzos del siglo XX se empezó a utilizar en los periódicos para enviar y recibir imágenes a través de las líneas telegráficas. En los años 20 la compañía AT&T empezó a comercializar los faxes de forma masiva. A mediados del siglo XX, se consiguieron aparatos capaces de conectarse a cualquier línea telefónica, con un tamaño y un precio más reducidos. La mejora definitiva la consiguieron los japoneses, reduciendo el tiempo de envío de una hoja a unos minutos, y consiguiendo precios más asequibles.

El fax se ha ido enfrentando a diferentes competidores a lo largo de su historia, y actualmente se está viendo desplazado del mercado por otros sistemas capaces de ofrecer el mismo servicio, como el correo electrónico.

El fax también es un producto sujeto a efectos de red en el que, al igual que ocurre con el Messenger, los efectos más relevantes son las externalidades de red directas, ya que un solo fax no puede utilizarse de forma independiente.

- **Externalidades de red directas:** el fax exige que al menos exista otro usuario al que poder conectarse, ya que sino el valor del producto es nulo (producto de red puro), puesto que no se podrán enviar documentos a ningún receptor. Cuanto mayor sea el número de usuarios que disponen de fax, más posibilidades hay de realizar el envío.