CAPÍTULO III

EL MODELO TEÓRICO

Esta sección desarrolla un marco teórico que reproduce los tres nuevos hechos empíricos sobre ciudades. Por simplicidad, el modelo consiste solamente en dos ciudades que son modelizadas como empresas con idénticas funciones de producción Cobb-Douglas [1]. En cada ciudad, la producción del único bien de consumo tiene lugar usando dos factores de producción: capital y trabajo. Esta tecnología presenta rendimientos decrecientes en cada factor de producción, pero rendimientos crecientes de escala. Por otro lado, existen costes convexos de producción asociados con la cantidad de capital instalado en una misma ciudad. Estos costes de congestión son la fuerza que limita la concentración de recursos en una ciudad. Se asume que, en el período inicial, una de las dos ciudades tiene un stock de capital instalado ligeramente superior al de la otra ciudad. La inversión en el modelo es irreversible: una vez que una cantidad dada de capital está instalada en una ciudad, no es posible destruirla o consumirla, ni tampoco es posible reasignar dicho capital a otra ciudad [2]. Por otro lado, el trabajo puede emigrar entre ciudades sin ningún tipo de coste.

Bajo este escenario, si los costes de congestión para bajos niveles de capital son suficientemente reducidos, los recursos se desplazan de forma desproporcionada hacia la ciudad con un stock inicial de capital mayor, hasta que estos costes convierten la ciudad

---

[1] En el apéndice C se presenta una extensión del modelo para el caso de $J > 2$ ciudades. Todos los resultados se mantienen en este caso más general.

[2] Éste es un supuesto razonable si se interpreta el capital físico como infraestructura (edificios, etc.) instalados en una ciudad.

inicialmente menor en un lugar más rentable para invertir. En ese momento, puesto que los costes de congestión son menores en la ciudad más pequeña, la tasa de inversión se vuelve estrictamente mayor en esa ciudad que en la de mayor tamaño, hasta que el stock de capital en las dos se iguala. Dependiendo de los parámetros del modelo, este escenario de convergencia puede no llegar a completarse totalmente. En esta parte del trabajo solamente se resuelve el problema de los mercados competitivos. El apéndice B desarrolla el correspondiente problema del planificador social benevolente.

1. LA SOLUCIÓN CON MERCADOS COMPETITIVOS

En primer lugar, se procede a describir el comportamiento de las familias y empresas en la economía y, seguidamente, se calcula su equilibrio competitivo.

A) Familias

Las fuentes de ingreso de las familias son las ganancias salariales y el retorno de los activos en los que éstas invierten. El salario competitivo es ω. Defínase Z^j como la cantidad de activos invertidos en la ciudad j, $j = A, B$. El ingreso proveniente del capital para una familia que invierte una cantidad positiva en cada uno de los dos activos viene dado $\sum_{j=A,B} r^j \; Z^j$, donde r^j representa el retorno bruto del capital en la ciudad j. Estos recursos pueden ser usados para consumir o invertir en activos. La restricción presupuestaria de una familia representativa es pues

$$\sum_{j=A,B} \dot{z}^j + c = \omega + \sum_{j=A,B} r^j \; z^j$$

donde $z^j \equiv \dfrac{Z^j}{N}$ y $c^j \equiv \dfrac{C}{N}$ representan el stock del activo j, $j = A, B$ y el consumo per cápita, respectivamente. Asumiendo utilidad logarítmica, el problema de maximización de la familia representativa es (omitiendo subíndices de tiempo):

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} \ln (c) dt$$

$$\sum_{j=A,B} \dot{z}^j + c = \omega + \sum_{j=A,B} r^j z^j$$

$$\dot{z}^j \geq 0, \forall j = A, B$$

$$z_0^j, \forall j = A, B \text{ dados}$$

donde, como se comentaba anteriormente, las familias tienen una restricción de irreversibilidad en la inversión, es decir $\dot{z}^j \geq 0$, $j = A, B$.

B) Empresas

Cada empresa dispone de una tecnología que presenta rendimientos constantes de escala. Esto garantiza que sus beneficios son nulos y que, sin pérdida de generalidad, se puede analizar el problema de una empresa representativa en cada ciudad. Esta empresa está sujeta a una externalidad positiva similar a la de ROMER (1986) que proviene del stock de capital medio instalado en la ciudad en la que opera. La función de producción de la empresa *i* localizada en la ciudad *j* viene dada por

$$Y^{ij} = (N^{ij})^\alpha (K^{ij})^{1-\alpha} (\tilde{K}^j)^\psi$$

donde Y^{ij}, N^{ij}, y $\tilde{K}^j$ respectivamente representan producción, trabajo y capital. El parámetro ψ es estrictamente positivo y $\tilde{K}^j$ representa el capital medio instalado en la ciudad *j*, esto es $\tilde{K}^j \equiv \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} K^{mj}$, donde *M* es un número grande que representa el número de empresas que operan en la ciudad *j*. Como en el modelo de ROMER, el supuesto de que las empresas toman K^{ij} como dado, puede ser racionalizado por un modelo con un continuo de individuos [3].

Las empresas contratan trabajo y capital a sus precios competitivos y venden su producto en el mercado.

---

[3] LUCAS (1988) y TAMURA (1991) destacan la importancia del capital humano medio para el crecimiento de la economía.

Por otro lado, tienen que pagar su contribución al coste de congestión[4] en la ciudad donde están localizadas. Se asume la forma funcional $g(K^j) = (K^j)^{\sigma}$, donde $K^j \equiv \sum_{m=1}^{M} K^{mj}$, M es el número de empresas que operan en la ciudad j, y $\sigma > 1$. Normalizando el precio del bien de consumo a uno, los beneficios de la empresa i, localizada en la ciudad j vienen dados por

$$\pi^{ij} = (N^{ij})^{\alpha}(K^{ij})^{1-\alpha}(\tilde{K}^j)^{\psi} - (r^j + \delta)K^{ij} - \frac{1}{M}g(K^j) - \omega N^{ij}$$

donde $\delta \in (0,1)$ es la tasa de depreciación del capital.

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial N^{ij}} = 0 \Leftrightarrow \alpha(N^{ij})^{\alpha-1}(K^{ij})^{1-\alpha+\psi} = \omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial \pi^{ij}}{\partial N^{ij}} = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)(N^{ij})^{\alpha}(K^{ij})^{\psi-\alpha} = r^j + \delta + g'(K^{ij}) \tag{2}$$

donde se ha impuesto la condición de equilibrio simétrico. Puesto que los trabajadores pueden cambiar de empresa y ciudad sin incurrir en ningún coste, el salario es, en equilibrio, el mismo en todas las empresas y ciudades. Esto implica que la asignación de trabajo se puede resumir con la siguiente ecuación:

$$\frac{N^A}{N^B} = \left(\frac{k^A}{k^B}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$$

donde $k^j \equiv \frac{K^j}{N}$, $j = A, B$ representa el capital per cápita en la ciudad j. Esto implica a su vez que el producto marginal bruto (sin considerar los costes de congestión) del capital en la empresa j es:

$$f_j = (1-\alpha)\Omega^{-\alpha}(k^j)^{\frac{\beta}{1-\alpha}-1} \tag{3}$$

donde la población total ha sido normalizada a uno y $\Omega \equiv \sum_{j=A,B} (k^j)^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$. La condición de primer orden respecto del capi-

[4] En el apéndice A se proveen fundamentos microeconómicos que justifican el uso de este tipo de costes.

tal para una empresa representativa en la ciudad j se puede reescribir como

$$\tilde{f}_j = r^j + \delta \tag{4}$$

donde $\tilde{f}_j \equiv f_j - g'(K^{ij})$ es el producto marginal neto del capital en la ciudad j.

C) Equilibrio

Puesto que la economía está cerrada al comercio internacional y no existe gobierno, el único activo disponible es el capital físico y, por tanto, $z^j = k^j$, $\forall j = A, B$. La siguiente proposición muestra que, debido a la diferencia inicial en los stocks de capital instalado y la existencia de rendimientos crecientes de escala, el producto marginal bruto del capital es siempre estrictamente mayor en la ciudad que tiene un mayor stock de capital.

Proposición 1: $f_A > f_B$, $\forall k^A > k^B > 0$

Demostración: véase apéndice B.

Los supuestos 1 y 2 imponen restricciones en las condiciones iniciales para que el problema sea económicamente interesante. El supuesto 1 establece que, en la fecha inicial, la ciudad A tiene un stock de capital ligeramente mayor al de la ciudad B.

Supuesto 1

$$K_0^A = K_0^B + \epsilon$$

donde ϵ es un número positivo pequeño.

El supuesto 2 impone que, en la fecha inicial, los costes de congestión en la ciudad con un mayor stock de capital son relativamente bajos, comparados con las ganancias de productividad asociadas con el tamaño de ésta. Esto garantiza que la inversión en la ciudad A es más rentable que en la ciudad B en la fecha inicial. Además, es necesario asumir que la inversión es rentable en la pequeña ciudad, es decir, su producto marginal neto del capital es estrictamente mayor que la suma de la tasa de descuento intertemporal y la tasa de depreciación.

Supuesto 2

$$\tilde{f}_{A0} > \tilde{f}_{B0} > \rho + \delta$$

Con estos supuestos, el equilibrio competitivo en esta economía tiene las siguientes propiedades. Las familias empiezan invirtiendo solamente en la ciudad con un mayor stock de capital, la ciudad *A*, puesto que es la oportunidad de inversión más rentable. Sin embargo, a medida que el stock de capital instalado en esta ciudad aumenta, los costes de congestión crecen rápidamente, de forma que, eventualmente, la inversión empieza a ser positiva también en la ciudad *B*. Para que el problema sea interesante, es necesario asumir que en el período $\hat{t}$, en el que la inversión comienza en la ciudad *B,* la inversión en esa ciudad es efectivamente rentable, esto es

Supuesto 3

$$\tilde{f}_{B\hat{t}} > \rho + \delta$$

Proposición 2: La tasa de crecimiento del consumo per cápita viene dada por

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \begin{cases} \tilde{f}_A - \rho - \delta, \forall t \in (0, \hat{t}] \\ \tilde{f}_j - \rho - \delta, \forall t \in (\hat{t}, t^*], \forall j = A, B \\ 0, \forall t > t^* \end{cases}$$

Demostración: véase apéndice B.

Dependiendo de los valores de los parámetros del modelo, es posible que la ciudad con un menor stock inicial de capital converja a la mayor ciudad antes de que la economía alcance su estado estacionario. Llamemos a este escenario *convergencia.* Si el proceso de convergencia no se completa antes de que la economía alcance una tasa de crecimiento nula, ésta reside para siempre en un estado de *no convergencia* [5].

[5] Desde un punto de vista empírico, parece evidente que el escenario de no convergencia es el más interesante, ya que, en realidad, se observan ciudades de diferentes tamaños en cada país.

El caso de convergencia

Ésta es una situación en la que la brecha inicial en los stocks de capital desaparece antes de que la economía alcance su estado estacionario. Defínase $\bar{t}$ como el período en el cual eso ocurre. La condición necesaria para este escenario es $\tilde{f}_A(\bar{t}) = \tilde{f}_B(\bar{t}) > \rho + \delta$, es decir, el producto marginal neto del capital converge antes de que la inversión deje de ser rentable. La probabilidad de estar en el caso de convergencia depende de tres tipos de parámetros: primero, depende negativamente del tamaño de la brecha inicial en los stocks de capital. En segundo lugar, cuanto mayor sea ρ, es decir, cuanto más impacientes sean las familias, más rápidamente el estado estacionario será alcanzado y, para una brecha inicial dada, menor será la probabilidad de convergencia. Finalmente, los parámetros de producción α, β y el parámetro de costes σ también afectan a la probabilidad de converger. Intuitivamente, si los rendimientos crecientes son elevados ($\alpha + \beta$ grande), mayor será la fracción de inversión en la ciudad *A,* reduciendo la probabilidad de convergencia. Lo contrario es cierto si σ es elevado, puesto que, en ese caso, la inversión en la ciudad inicialmente mayor termina relativamente pronto.

Defínase t^* como el período en el que $\tilde{f}_j = \rho + \delta, \forall j = A, B$, es decir, el período en el que la economía alcanza su estado estacionario. Los tres períodos $\hat{t}$, $\bar{t}$, y t^* están bien definidos porque, a diferencia del modelo neoclásico, la convergencia a un stock de capital determinado se alcanza en tiempo finito. Esto es así debido a que la condición de Inada $\lim_{k^j \to \infty} \tilde{f}_j = -\infty$ asegura que la tasa de crecimiento de la economía disminuye suficientemente rápido. El siguiente corolario resume la política de inversión que siguen las familias en el escenario de convergencia:

Corolario 1: La política de inversión es:

$$\begin{cases} i^A > i^B = 0, \forall t \in (0, \hat{t}] \\ i^A < i^B, \forall t \in (\hat{t}, \bar{t}] \\ i^A = i^B, \forall t > \bar{t} \end{cases}$$

El caso de no convergencia

Bajo este escenario, la brecha inicial en los stocks de capital no desaparece totalmente antes de que la economía alcance su estado estacionario. El corolario 2 presenta el plan de inversión que maximiza la utilidad de las familias en este caso:

Corolario 2: La política de inversión es:

$$\begin{cases} i^A > i^B = 0, \forall t \in (0, \hat{t}] \\ i^A < i^B, \forall t \in (\hat{t}, t^*) \\ i^j = \delta(k^j)^*, \forall j = A, B, \forall t \geq t^* \end{cases}$$

La evolución de los stocks de capital en cada ciudad en el caso de convergencia se muestran en el gráfico 3 del apéndice D. Dados los supuestos que se utilizan, el stock inicial de capital es mayor en la ciudad A. Durante el intervalo de tiempo $(0, \hat{t}]$ este stock aumenta en la ciudad A y disminuye en B debido a la depreciación. Una vez que el producto marginal neto del capital se iguala en las dos ciudades, en el período $\hat{t}$, el stock de capital per cápita crece más rápidamente en la ciudad B que en la A. Esto sigue siendo cierto hasta que el nivel de capital de ambas ciudades converge. A partir de ese instante, los dos stocks crecen a la misma tasa y, finalmente, se mantienen constantes en el estado estacionario, que es alcanzado en el período t^*. El gráfico 4 muestra la evolución de los ratios de población en cada ciudad en esta situación. El peso relativo de la ciudad A aumenta en el intervalo $(0, \hat{t}]$, puesto que las familias solamente invierten allí. Después del período $\hat{t}$, el ratio de A decrece porque la inversión es mayor en la ciudad B. En el intervalo $(\hat{t}, t^*)$, como la inversión es idéntica en las dos ciudades y el stock de capital es el mismo, los ratios de población son también idénticos. Los gráficos 5 y 6 muestran el caso de no convergencia. La única diferencia respecto del escenario previo es que el nivel de capital per cápita y el ratio de población de la ciudad B nunca llegan a converger completamente con los de la ciudad A.